8.2.2012

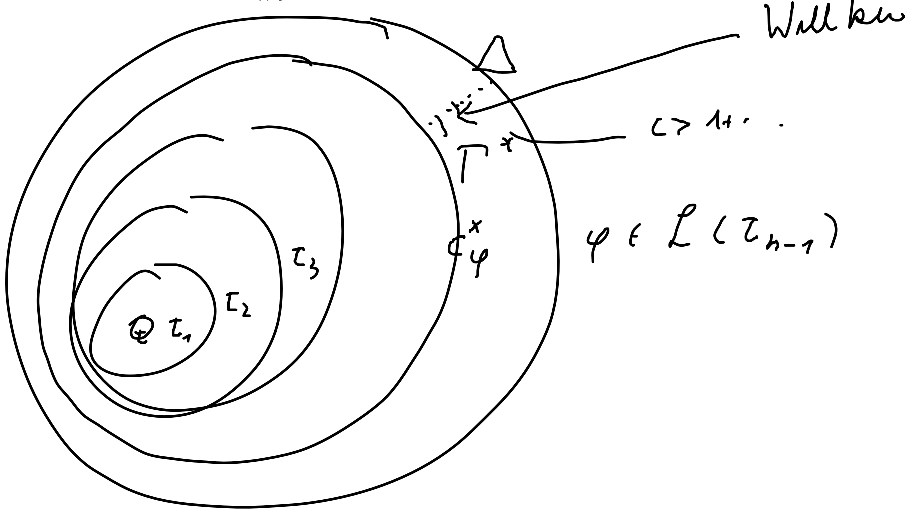
$\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \longrightarrow \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$

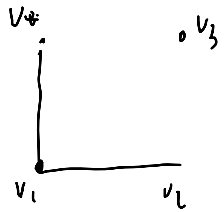
infinitäre Sprachen

Vollständigkeitssatz

a) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar

b) $\Gamma \models \varphi \quad \underset{\text{Korrektheit}}{\overset{\text{Vollst.}}{\rightleftarrows}} \quad \Gamma \vdash \varphi$





erst stufige Zahlentheorie

$T = \{ \varphi \mid (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi \}$

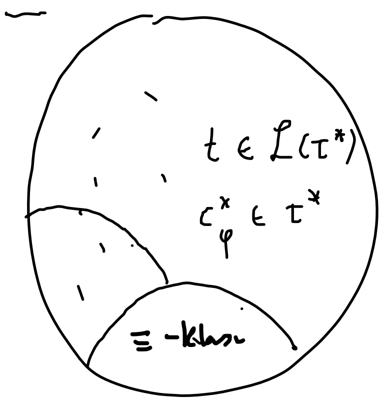
erfüllt

$\Delta \supseteq T$, Δ maximal konsistent $\mathcal{L}(\tau^*)$

und Δ hat Beispiele

$\exists x \varphi \to \varphi \frac{c^x_\varphi}{x}$

$\neg \forall x \neg \varphi \to \neg \varphi \frac{c^x_\varphi}{x}$



Wir sagen $A = \{ t/_{\equiv} \mid t \ \mathcal{L}(\tau^*)\text{-Term} \}$

$t_1 \equiv t_2 \ :\Leftrightarrow \ t_1 = t_2 \in \Delta$

$t_2 = t_1 \in \Delta$ "

$\equiv$ ist eine Äq rel. $t_1 = t_1 \in \Delta$

refl., sym., trans.

$t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \xrightarrow{\text{Hilbertk.}} \underbrace{t_1 = t_3}_{\in \Delta}$

$\mathcal{A} = \left(A, (P^{\mathcal{A}})_{P\in\tau'}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in\tau'}, (c^{\mathcal{A}})_{c\in\tau^*}\right)$ $\quad L(\tau^*)$-Struktur

Wunsch: $\mathcal{A} \models \underset{\cup\!\mid}{\Delta}$

$\mathcal{A} \models \Gamma$

$\mathcal{A}\restriction L(\tau) := \left(A, (P^{\mathcal{A}})_{P\in\tau}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in\tau}, (c^{\mathcal{A}})_{c\in\tau}\right) \models \Gamma$

$P^{\mathcal{A}} = \{ (t_1/_\equiv, \ldots, t_n/_\equiv) \mid Pt_1\ldots t_n \in \Delta \}$

$Pt'_1\ldots t'_n \notin \Delta$

Ist $P^{\mathcal{A}}$ wohldefiniert?

$t_i \equiv t'_i$ $\quad$ nicht mögl., wegen der $=$-Axiome

$x = x' \to (\alpha \to \alpha')$

$\vdots$ einige x durch x' ersetzt.

$f^{\mathcal{A}}(t_1/_\equiv, \ldots, t_n/_\equiv) = (ft_1\ldots t_n)/_\equiv$

t'_i

$c^{\mathcal{A}} = c/_\equiv$ für $c \in \tau^*$ Konst.

$s(v_i) = v_i/_\equiv$ Belegung

$\in A$

$\varphi \in \Delta \leftrightarrow \neg\varphi \notin \Delta$

Beh $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ gdw $\varphi \in \Delta$

$(\mathfrak{A}, s) \not\models \psi$ $\quad \neg\varphi \notin \Delta$ $\quad \varphi = \neg\psi$

Beweis: Induktionsanfang.

$t_1 = t_2 \in \Delta \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \models t_1/_\equiv = t_2/_\equiv$

$P^{\mathfrak{A}}\, t_1/_\equiv \ldots t_n/_\equiv \Leftrightarrow P t_1 \ldots t_n \in \Delta$

$\bar{s}(t) = t/_\equiv$ induktiv über den Aufbau der Terme

$\bar{s}(v_i) = s(v_i) = v_i/_\equiv$

$\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}} = c/_\equiv$ für $c \in \tau^*$

$\bar{s}(f t_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1) \ldots \bar{s}(t_n)) \overset{\text{I.V}}{=} f^{\mathfrak{A}}(t_1/_\equiv, \ldots, t_n/_\equiv) \overset{\text{Def}}{=} (f t_1 \ldots t_n)/_\equiv$

$f t_1 \ldots t_n = t_{n+1}$

$(\mathfrak{A}, s) \models (\varphi \to \psi) \iff (\varphi \to \psi) \in \Delta$

$\Updownarrow$ $\qquad$ Δ max $\qquad$ Δ w.f.

Wenn $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$, dann $(\mathfrak{A}, s) \models \psi$

Wenn $\varphi \in \Delta$, dann $\psi \in \Delta$

$(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \psi \overset{\text{Def}}{\iff}$ f.a. $a \in A$ $(\mathfrak{A}, s(x|a)) \models \psi$

Wähle c, s.d. $(*)$ $\underline{\neg \forall x \psi} \to \underline{\neg \psi^x_c} \in \Delta$.

$(\mathfrak{A}, s(x \mid \underline{\underline{c}})) \models \psi$

$\xrightarrow{\text{Ersetzungslemma}}$ $(\mathfrak{A}, s) \models \psi^x_c$. $\overset{\text{I.V.}}{\iff}$ $\psi^x_c \in \Delta$

$\overset{*}{\Rightarrow}$ Δ w.f. $\forall x \psi \in \Delta$.

$(\mathfrak{A}, s) \not\models \forall x \psi \iff (\mathfrak{A}, s) \models \neg \forall x \psi$

$\forall x\, \varphi(x) \leftrightarrow \forall y\, \varphi(y)$

Beh. $\underline{\neg \forall x \psi} \in \Delta$

ex. $a \in A$ $\quad (\mathfrak{A}, s(x|a)) \models \neg \psi$

$\underline{\text{ex } t \in \mathcal{L}(\tau^*)\text{-Term}}$ $\quad (\mathfrak{A}, s(x|t/_\equiv)) \models \neg \psi$

ψ eventuell durch ψ' ersetzen ← dass x in ψ' einsetzbar, $\psi' \leftrightarrow \psi$

$(\mathfrak{A}, s) \models \underline{\neg \psi^x_{t}}$ $\quad \overset{\text{I.V.}}{\iff} \quad \neg \psi^x_t \in \Delta$

$\psi^x_{t'}$ $\quad t' = t \in \Delta$

$\forall x \psi \rightarrow \psi^x_t \in \Delta$

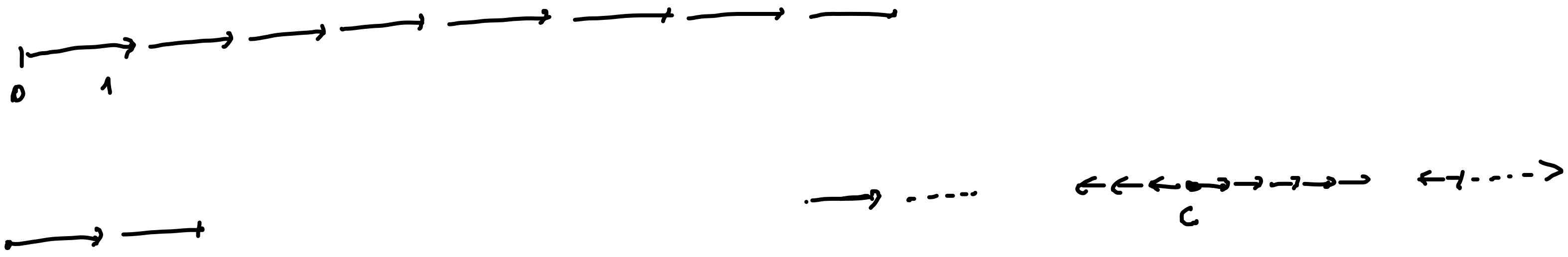
$\forall x \psi \rightarrow \underline{\psi^x_t} \in \Delta$, da Δ maximal.

Wenn $\forall x \psi \in \Delta$, dann auch $\psi^x_t \in \Delta$

Also ist $\forall x \psi \notin \Delta$. Da Δ max. $\neg \forall x \psi \in \Delta$.

$\Gamma = Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

$= \{ \varphi \mid (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi \}$



$c > \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \in \mathbb{N}}$

Beh: $\Gamma \cup \{ c > \underbrace{1 + \dots + 1}_{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ hat ein Modell.

$\Gamma \cup \{ c > 1 + \dots + 1 \mid n \in K \}$ $K \in \mathbb{N}$ hat ein Modell

Γ heißt vollständig: $\forall \varphi \in L(\tau)$ φ Satz (seltene Eigenschaft)

$\Gamma \models \varphi$ od. $\Gamma \models \neg\varphi$.

Γ hat bis auf Isomorphie nur ein Modell: f.a. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Gamma$

$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

<u>Satz</u>

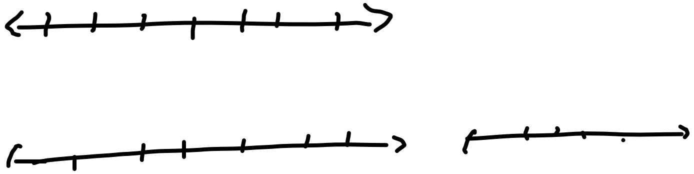
Wenn Γ ein unendliches Modell hat, dann hat Γ verschiedene, nicht isomorphe Modelle.

$\mathfrak{A} \models \Gamma$

„Vollständigkeitssatz für überabz. Sprachen" $\Rightarrow \exists\, \mathfrak{B} \models \Gamma$

$|B| > |A|$.

$(\mathbb{Z},<)$



$\square$

Ein Zeithierarchiesatz

Ziel: $T, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Zeitmaße.

$$\mathrm{DTIME}(T) \setminus \mathrm{DTIME}(t) \neq \emptyset$$

bei $t \ll T$ und t - berechenbare t.

wird präzisiert

M_{u} : Turingmaschine, die durch u kodiert

$$\in \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \cancel{\{L,R\}} \times Q \times \Gamma \times \{R,L\})$$

$\{q_0, \ldots, q_m\}$ $\{x_0, \ldots, x_r\}$

$$\Sigma_u = \{ ,\ , *, (,), L, R \}$$

$$\delta(q_i, x_j) = (q_{i'}, x_{j'}, \begin{matrix} R \\ L \end{matrix}) \;\hat{=}\; (*^i, *^j, *^{i'}, *^{j'}, \begin{matrix} R \\ L \\ * \end{matrix})$$

$$u = \underbrace{(\qquad\qquad)}_{\text{jede Gleichung der Tafel}}(\qquad)(\qquad) \in \Sigma_u^* \text{ kodiert}$$

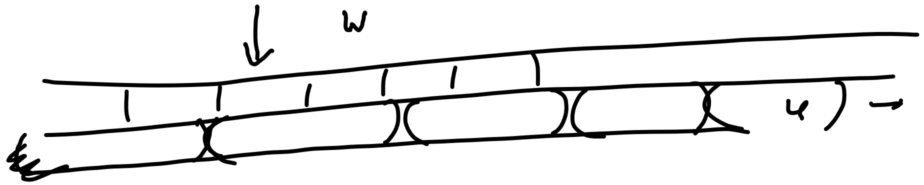
die Tafel von M „$=$" M_u.

M erhält $(u \# w)$ als Eingabe

M arbeitet wie M_u angesetzt auf w.

So ein M heißt universelle Turingmaschine.

Eine Skizze für M_u $\quad$ M_δ



Sei M eine $f(n)$ - zeitbeschr. TM. mit Tafel δ

Dann simuliert M_u, u Code von δ,

M in $O(|u|^2 \cdot f(n))$ - vielen Schritten.

$H = \{ (u, w) \mid M_u \text{ akz. } w \}$

$r \in \mathbb{R}$, $\lceil r \rceil$ = kleinste ganze Zahl $\geq r$

$\lfloor r \rfloor$ = größte ganze Zahl $\leq r$

Def: $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt k-Band-zeitkonstruierbar, $k \geq 2$

: wenn es eine $O(t(n))$ zeitbeschränkte TM gibt, die angesetzt auf $w \in \{0,1\}^*$ die Binärdarstellung von $t(|w|)$ erzeugt.

Lemma $t(n) = n$ ist 2-Band zeitkonstruierbar.

0

1

10 $\rightarrow$

11

100 8

$|w| = n$

$$O\left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor + 1} \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil i \right)$$