15.2.2012

k-Bandturingmaschine $\quad k \geq 2$

Def $\quad t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist zeitkonst.

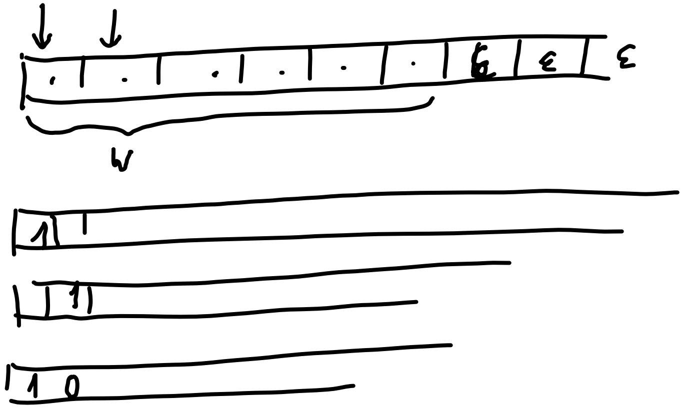
$O(t(n))$ - zeitbeschr. TM

$w \longmapsto bin(t(|w|))$

Binärdarst.

Lemma $\quad t(n) = n$ ist zeitkonst.

Beweis: 2 Band-TM



10		2S.
11 –		
100	3St.	
101 –		
110		2St.
111 –		
1000	4St.	

Laufzeit ~~für~~ zum Erzeugen von bin(n)

$\log(n) \leq \sqrt{n}$

$n \leq e^{\sqrt{n}}$

$$O\left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor + 1} \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil i\right) \leq$$

$$O\left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor + 1} \left(\frac{n}{2^i} + 1\right) i\right) \leq$$

$$O\left(n + \frac{\overset{\sqrt{n}}{\log(n)}\,(\log(n)+1)}{2}\right)$$

$$= O(n)$$

~~Lemma~~

Satz Hartmanis, Stearns 1965

Für $k \geq 2$ gilt: Ist $T(n)$ k-Band-zeitkonstruierbar

und ist $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{t(n) \log(t(n))}{T(n)} = 0$, dann

$$\underbrace{DTIME_k(T(n))}_{L(Q)} \setminus \underbrace{DTIME_k(t(n))}_{L(M) \quad M \; t(n)\text{- k-Band Maschine}} \neq \emptyset$$

Bew: Wir geben eine k-Band TM Q, s.d.

$$A(Q) \in DTIME_k(T(n)) \setminus \underline{DTIME_k(t(n))}$$

z.z. f.a. L k-TM, die $t(n)$-zeitbeschr.

$$A(L) \neq A(Q)$$

Turingmaschine D. k-Band

Eingabe: $u \in \{0,1\}^*$. u Gödelnummer einer Turingm. M_u

Eingabe: $w \in \{0,1,,\}^*$

D interpretiert w als $u, v = w$

D ~~ändert~~ erzeugt u, u, v.

Falls w nicht die Form u,v hat, verwirft D w.

~~Berechne~~ Simuliere: M_u angesetzt auf u,v

Beh: Jede Rechnung der Länge $t \geq |u \cdot v|$ von M_u angesetzt auf u,v kann von D in $\leq C \cdot |u|^2 \cdot t$ Schritten simuliert werden.

Verbesserung von D zu einer Maschine Q

} k Band wie D

$\text{bin}\left\lceil \frac{\cancel{\log}(T(n))}{\log(T(n))} \right\rceil$

auf der 2. Spur

Trick:

Zähle auf der 2. Spur des 1. Bandes erzeugt bin $\left\lceil \frac{T(n)}{\log(T(n))} \right\rceil$

Länge $O\left(\log\left(\frac{T(n)}{\log(T(n))}\right)\right)$ in $O\left(\log\left(\frac{T(n)}{\log(T(n))}\right)\right)$ - Schritten

Maschine Q:

Arbeitet auf der 1. Spur des 1. Bandes zusammen mit dem 2. bis zum k. Band wie die TM D.

~~Sie~~ Q arbeitet $\left\lceil \frac{T(n)}{\log(T(n))} \right\rceil$ Schritte von D ab.

Q braucht $\underline{O(T(n))}$ Schritte, da jeder D-Schritt noch $O(\log(T(n)))$ viele Zähl-Organisationsschritte verlangt.

A) Hält D (also M_u), bevor der Zähler $= 0$ ist, dann akzeptiert Q das Wort u, v, ~~#~~ genau dann, wenn D verwirft.

B) Hält D nicht vor der Zeit $\left\lceil \frac{T(n)}{\log(T(n))} \right\rceil$, entscheidet Q positiv / negativ / egal.

Beh: $A(Q) \notin DTIME_k(t(n))$

Bew: Sei $L \in DTIME_k(t(n))$

Sei $L = A(M)$, M sei $C' \cdot t(n)$ - zeitbeschränkt.

$M = M_u$ für ein u.

Wir nehmen (~~et~~ im Nachhinein motiviert) $n \in \mathbb{N}$ s.d. $n > |u|$ und

vor. des Satzes ------ $T(n) > \underbrace{2C' \cdot C}|u|^2 \cdot t(n) \cdot \log(t(n))$

und $\frac{t(n)}{2 \log(t(n))} > C' \cdot C \cdot |u|^2$

Für ~~ein~~ solche n gilt:

$$\frac{T(n)}{\log(T(n))} > C' \cdot C \cdot |u|^2 \cdot t(n)$$

1. Fall: $T(n) < t^2(n)$
2. Fall $T(n) \geq t^2(n)$ nachrechnen.

Sei $v \in \{0,1\}^*$ $|v| = n - |u| - 1$.

Code von $M = M_u$ s.d. $A(M_u) = L \in DTIME_k(t(n))$

Sei $w_u := u,v$.

M_u angesetzt auf w_u braucht $\leq C'\, t(n)$ Schritte und kommt dann zu einer Entscheidung, ob $u,v \in L$

Die Maschine D (die in Q ist) simuliert M_u $\frac{T(n)}{\log(T(n))}$ Schritte.

$$C'\, t(n) \cdot \underbrace{C \cdot |u|^2}_{\text{Faktor für } M_u} < \frac{T(n)}{\log(T(n))}$$ nach unserer Annahme.

$w_u \in L(M) \iff w_u \in L(M_u) \iff w_u \in L(D)$

u, v

$\iff w_u \notin L(Q)$

Fall A) in der Programmierung von Q.

Also $L(M) = L \neq L(Q)$. $\square$

Fischer, Rabin 1970 er Jahre.

Michael Rabin

$Th(\mathbb{N}, +, 0)$ entscheidbar.

schwer ents. 2^{2^n}

$Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ unentscheidbar, ~~rek. aufzählb.~~

Savitch

PSPACE = NPSPACE

$\uparrow$

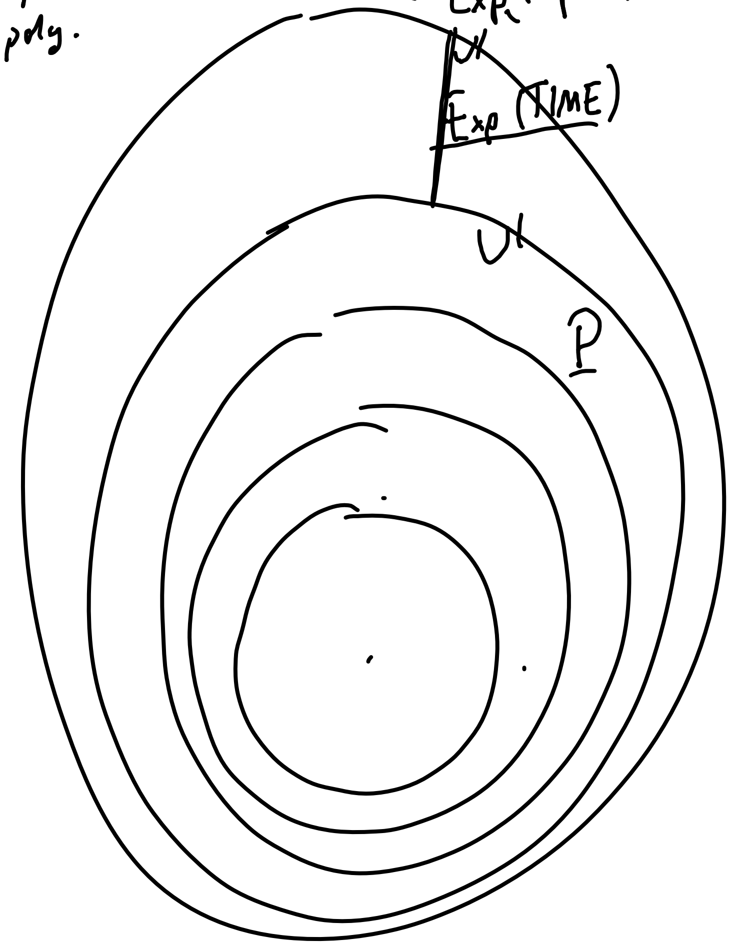
poly.

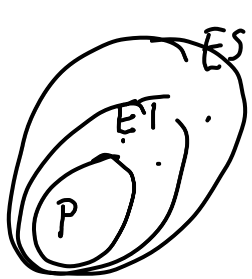
ExpExp

$\vdots$

Exp(Space)

$\cup\!\shortmid$





Exp(Space) $-$ P $\neq \emptyset$

$\Downarrow$

L

$$T(n) = n^2$$

$$t(n) = n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \log(n)}{n^2} = 0$$