23. 11. 2011

Kompaktheitssatz

$\Sigma \models \varphi \Rightarrow$ ex $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ Σ_0 endl. $\Sigma_0 \models \varphi$

Entscheidbarkeit der Menge $\{ \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}) \mid \models \varphi \}$

1.6. Boolesche Algebren

Def Eine Boole'sche Algebra ist eine Struktur $(\underbrace{B, 0, 1, \sqcap, \sqcup,}_{\neq \emptyset} {}^c)$ mit folgenden Eigenschaften. $B \neq \emptyset$, $0, 1 \in B$, $\sqcap, \sqcup : B \times B \to B$, ${}^c : B \to B$, so dass folgende Gleichungen gelten:

$a \sqcap a = a$ | $a \sqcup a = a$ | Idempotenz

$a \sqcap b = b \sqcap a$ | $a \sqcup b = b \sqcup a$ | Kommutativ

$a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ | $a \ldots$ | Assoziativges.

$a \sqcap (a \sqcup b) = a$ | $a \sqcup (a \sqcap b) = a$ | Absorptionsgesetz

$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ | (2) .. | Distributivitätsges.

$0 \sqcap a = 0$ | $1 \sqcup a = 1$ | Extrema

$a \sqcap a^c = 0$ | $a \sqcup a^c = 1$ | Komplementierung.

Bem: Die ersten 5 Gesetze entsprechen den Grundäquivalenzen für $\wedge, \vee$

Bem: (2) lässt sich herleiten

Bem: $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup)$ mit den ersten 6 Gleichungen heißt (distributiver) Verband

$(B, 0, 1, \leq)$ gehört zu einem Verband, wenn $a \leq b :\Leftrightarrow a \sqcap b = a$

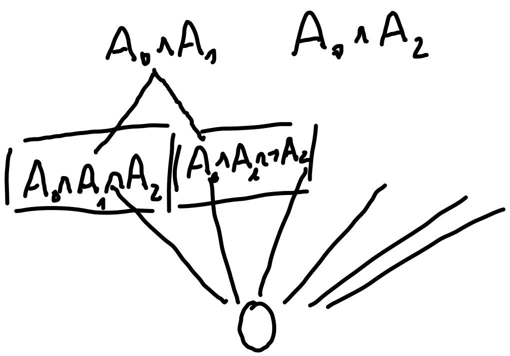
$a \sqcup b = b$

sup, inf $\quad \sup(a, b) = a \sqcup b$

1

V

$A_0, A_1, A_2, \ldots$ $A_n \ldots$ $\neg A_0$ $\neg A_1$ $\neg A_2$ .....



Atome

Bsp: Variablen

$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$

Anzahl der Atome

$2^{|A|}$ $\qquad |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

<u>Def</u> $a \in B$ heißt Atom $:\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ und für alle b gilt:

$b \leq a \Rightarrow (b = 0$ oder $b = a)$

Beispiel für eine boolesche Algebra: X Menge, $B = \mathcal{P}(X)$, $0 = \emptyset$

$\sqcap = \cap$ $\qquad 1 = X$

$\sqcup = \cup$

$\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Eine Einbettung: ~~zw~~ von einer Struktur $i. \; (A, 0^A, 1^A, \sqcup^A, \sqcap^A, {}^{cA}) \xhookrightarrow[\text{inj}]{B} (B, 0^B, 1^B, \sqcup^B, \sqcap^B, {}^{cB})$

ist eine strukturerhaltende Injektion.

$i(0^A) = 0^B$

$i(a \sqcap^A b) = i(a) \sqcap^B i(b)$

Eine surjektive Einbettung ist ein Isomorphismus.

Satz von Stone (≈ 1936) representation theorem

a) Jede endl. B. A. *kann* ist isomorph zu einer Potenzmengenalgebra.

b) Jede B. A. lässt sich in eine Potenzmengenalgebra einbetten.

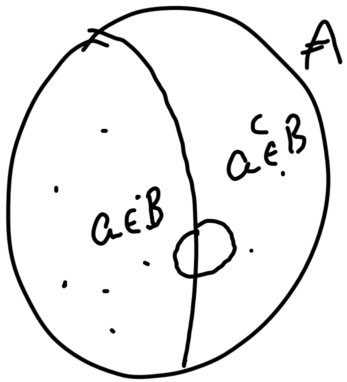
Beweis: Sei $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, {}^c)$ geg.

a) $x \in B$ Atom. $A = \{x \in B \mid x \text{ Atom}\}$.

$$B \hookrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$i: \quad b \longmapsto \{ a \in A \mid a \overset{B}{\leq} b \}$$

$$a \overset{B}{\sqcap} b = a$$



$$i(0^B) = \emptyset$$

$$i(1^B) = A$$

$$i(a \underset{\sqcup}{\overset{B}{\sqcap}} b) = \{ c \in A \mid c \leq a \underset{\sqcup}{\overset{B}{\sqcap}} b \} \underset{\subseteq}{\overset{\text{Atome}}{=}} \{ c \in A \mid c \leq a \underset{\text{oder}}{\text{und}} c \leq b \}$$

$$= \{ c \in A \mid c \leq a \} \underset{\cup}{\cap} \{ c \in A \mid c \leq b \} = i(a) \cap i(b)$$

$$i(a^c) = \{ c \in A \mid c \leq a^c \} \overset{\text{Atome}}{=} \{ c \in A \mid \text{nicht } c \leq a \} = A \setminus i(a)$$

ohne

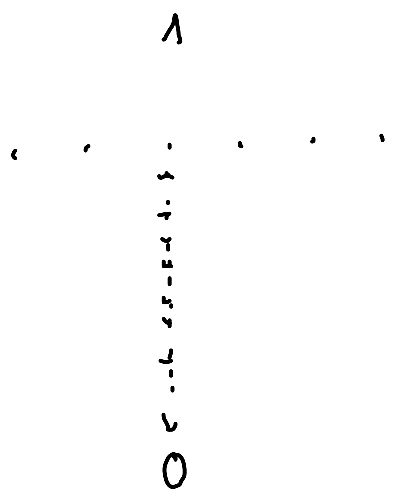
Komplement in $\mathcal{P}(A)$

$$= \{ c \in A \mid c \notin i(a) \}$$

i ist surjektiv. Sei $C \subseteq A$

$$i\Big(\bigcup_{a \in C} a \Big) = C$$

Beweis zu ~~B~~ b):



Beispiel für eine atomlose B.A. : $B = \{ \bigcup_{n<N} I_n \mid I_n$ Intervalle auf $\mathbb{Q}$, $N \in \mathbb{N} \}$

Ersatz für Atome: Ultrafilter:

Def Sei B eine Boole'sche Alg. $U \subseteq B$ heißt Ultrafilter g.d.w. U folgende Eig. hat:

1) $\forall u \in U \quad \forall v \in B \quad (u \sqsubseteq v \to v \in U)$ „nach oben abgeschlossen" } Filter

2) $\forall u, v \in U \quad u \sqcap v \in U$

3) ~~$\emptyset \in$~~ $0 \notin U$ (eigentlicher Filter, echter Filter)

4) U ist maximal mit den Eig. 1) 2) und 3).

f.a. $V \supsetneq U$ gilt: V verletzt 1), 2) oder 3).

$\{1\}$

Es gibt Ultrafilter.

Beweis: Wende Lemma von Zorn an auf $(\{F \mid F \text{ Filter auf } B\}, \subseteq)$

<u>Bem</u> 4) ist auf der Basis von 1) 2) 3) äquivalent zu:

f.a. $b \in B$ $(b \in U \;\dot\vee\; b^c \in U)$

$S(B) = \{U \mid U \text{ Ultrafilter auf } B\}$ Stone-Raum $\left(2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}\right)$ viele U.f.

$\aleph_0$

$2^{2^{2}}$

$$i: B \longrightarrow \mathcal{P}(S(B))$$
$$b \longmapsto \{U \mid U \text{ Ultrafilter auf } B,\ b \in U\}$$

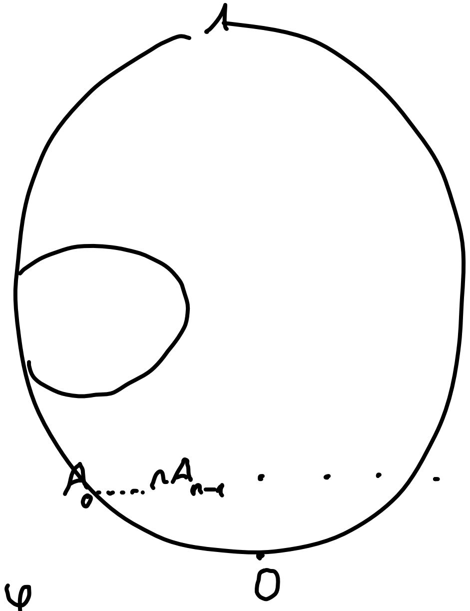
$i(b \sqcap c) = i(b) \cap i(c)$

$i(b^c) = \mathcal{P}(S(X)) \setminus i(b) \overset{!}{=} \{ U \mid U$ Uf. auf B, $b \notin U \}$ ultra

i ist nur im Endlichen surjektiv.

Beispiel: Lindenbaumalgebra Sei $n \in \mathbb{N}$, n Anzahl der Satzvariablen.

$$LA_n = (\{ \varphi/_{\equiv} \mid \varphi \in \mathcal{L}(A_0, \dots, A_{n-1}) \}, 0, 1, \sqcap, \sqcup, {}^c)$$



$\varphi \equiv \psi$ log. äquivalent $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

$\varphi/_{\equiv} = \{ \psi \mid \psi \equiv \varphi \}$

$1 = \top/_{\equiv}$

$0 = \bot/_{\equiv}$

$\varphi/_{\equiv} \; \underset{\sqcup}{\sqcap} \; \psi/_{\equiv} = (\varphi \underset{\vee}{\wedge} \psi)/_{\equiv}$ $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$

$(\varphi/_{\equiv})^c = \neg\varphi/_{\equiv}$ $\varphi \wedge \varphi$ $\varphi/_{\equiv} \neq \psi/_{\equiv}$

Wie groß ist LA_n? $\quad 2^{2^n}$ logisch verschiedene Formeln in den Variablen $A_0, \dots, A_{n-1}$

Bsp. $A_0/_{\equiv}$

$A_0 \vee (A_0 \wedge A_1)/_{\equiv}$

Kap: Komplexitätstheorie

$A \subseteq \mathbb{N}$ Es gebe einen Algorithmus der $n \in A$? entscheidet.
$\Gamma \subseteq \Sigma^*$ $\quad \sigma \in \Gamma$?

$n \in A$? oder in $f(n)$ vielen Schritten entschieden werden.

$\sigma \in \Gamma$? $\quad f|\sigma|$ "

σ $\cancel{\varphi}$ $\in \{\varphi \mid \models \varphi\}$? $\quad 2^{|\varphi|}$

Algorithmus Rechenregeln

⋮

Turing-Maschine

λ-Kalkül, rekursive Fkt $\Big\}$ 1930er Jahre

C^{++}, ...

Def Eine Turing-Maschine M ist ein 7-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ak}, q_{ab})$$ mit folgenden Eig.

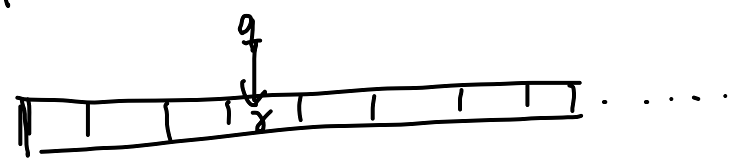
- $Q \neq \emptyset$ ist die Menge der Zustände, Q endl.
- Σ ist das Eingabe-Alphabet, Σ endlich
- $\Gamma \supseteq \Sigma$, Γ Band-Alphabet, Γ endl, $\cancel{b}\ \varepsilon\ b\ \sqcup$ (blank) $\in \Gamma \setminus \Sigma$

  (Buchstabe für leere Turingzelle)

- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $q_{ak} \in Q$ Akz. zustand
- $q_{ab} \neq q_{ak}$ Ablehnungszustand.

Beschreibung: $|Q \times \Gamma|$ viele Tafeleinträge

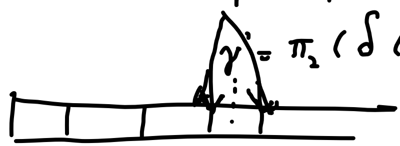
- $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$



δ $\rightsquigarrow$

$q' = \pi_1(\delta(q,\gamma))$

$\gamma' = \pi_2(\delta(q,\gamma))$



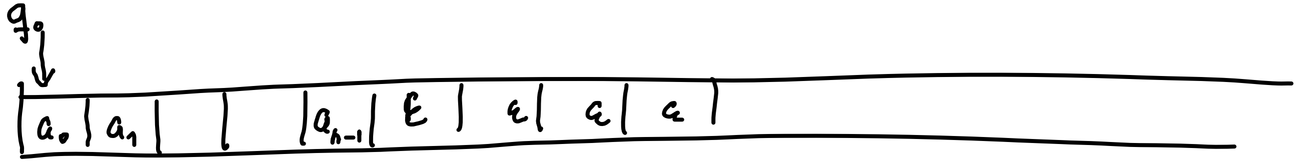
$\delta \quad \delta$

Wie viele δ gibt es? $|Q \times \Gamma|$

$|Q \times \Gamma \times \{R, L\}|$

„Probleme" $\quad A \subseteq \Sigma^*$

$(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \in \Sigma^*$



$\sigma = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \in A$?