7. 12. 2011

Nicht deterministische Turingmaschinen

Def: " ist ein 7-Tupel

Stoppzustände

akz.

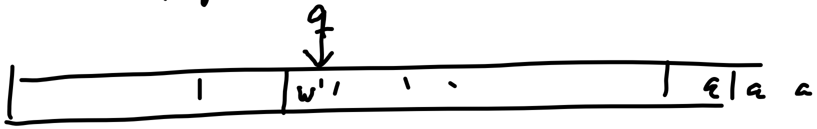
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \overset{\varepsilon}{b}, q_0, S, F, \delta)$$

wie in der Def der TM, bis auf

$$\delta : (Q \setminus S) \times \Gamma \longrightarrow \overbrace{\underbrace{\mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{R, L\})}_{Q \times \Gamma \times \{R, L\}} \setminus \{\emptyset\}}^{\text{endl. Menge}}$$

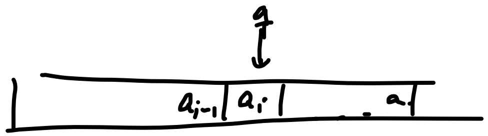
Wir betrachten nur nicht det. TM, die längs jedes Berechnungsastes stoppen.

Def: Konfiguration (wie vorher)



(w, q, w')

Def Eine Konfiguration C hat die Menge der (direkten) Nachfolgerkonfiguration



$$\hat\delta(a_0,\dots\; a_{i-1},(q,a_i),\dots\; a_{n-1})$$

$$= \{(a_0,\dots\; a_{i-2},(q',a_{i-1}),a_i',\dots\; a_{n-1}) \mid \delta(q,a_i) \ni (q',a_i',L)\}$$

$$\cup\, \{(a_0,\dots, a_{i-1},a_i',(q',a_{i+1}),a_{i+2}\; a_{n-1}) \mid (q',a_i',R) \in \delta(q,a_i)\}$$

Wir schreiben $C \vdash C'$ wenn $C' \in \hat\delta^{(n)}(\{C\})$

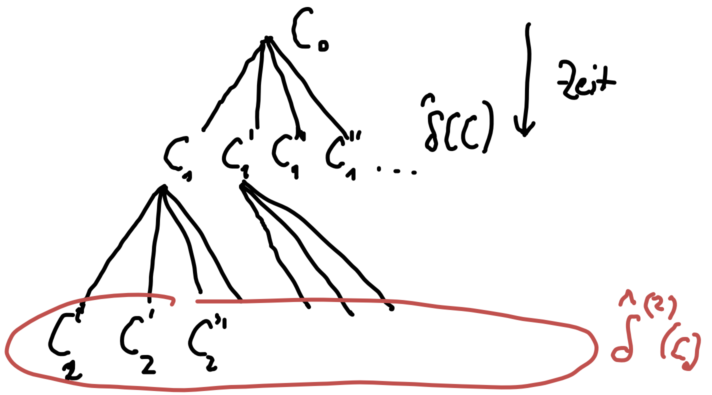
Iteration

$$\hat\delta^{0}(C) = C$$

$$\hat\delta^{1}(C) = \hat\delta(C) \quad \text{wie oben definiert}$$

$$\hat\delta^{(n+1)}(C) = \bigcup \hat\delta[\hat\delta^{(n)}(C)] = \bigcup \hat\delta\,''\,\hat\delta^{(n)}(C)$$

$$f\,''X = \{f(x) \mid x \in X\}$$



Ein Berechnungsast ist eine Folge

$$C_0 \vdash C_1 \vdash C_2 \vdash \dots\dots C_n$$

direkt

$q(C_n) \in S$ Stoppzustand.

Def Akzeptierungsmenge

$A(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid$ Startend von $C_0 = (\square, q_0, w_+)$

(auch geschrieben als $((q_0, a_0), a_1, \dots, a_{n-1})$)

gibt es eine Konfigurationfolge $C_0 \vdash C_1 \dots \vdash C_m$, so dass

$q(C_m)$ akzeptierend $\}$

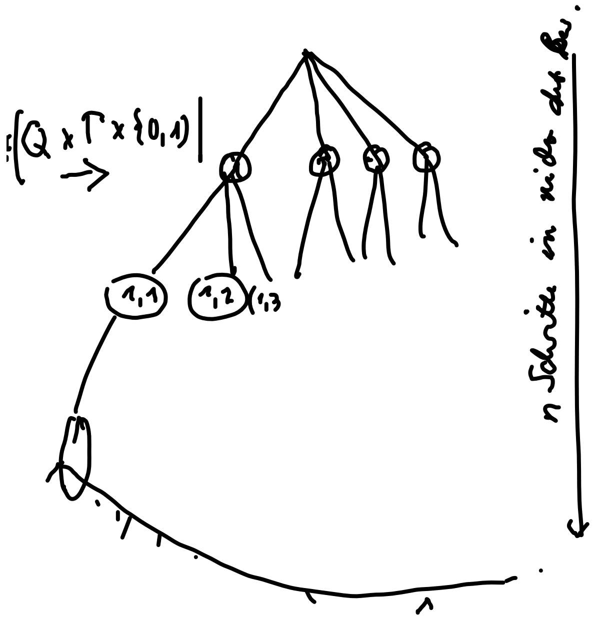
Satz Zu jeder nicht det. TM gibt es eine det. TM, die dieselbe Menge akzeptiert.

Beweis: Einfacher Fall: der nach der Definition von aus der Vorlesung, dass beide Maschinentypen immer stoppen sollen.

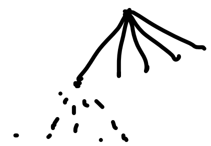
Geg. M nicht det.

Gesucht M' det. $A(M) = A(M')$.

Die Tafel von M hat (mindestens) $|Q \times \Gamma \times \{L, R\}|$ viele Zustände.



Baum der Tiefe n mit höchstens k Kindern an jedem Knoten:



$\leq k^n$ viele Äste.

$\leq \sum_{i \leq n} k^i$ viele Knoten

Eine Zeile $\delta(q, a)$ entspricht bei M dann ~~nur~~ eine Reihe von $|Q \times \Gamma \times \{0, 1\}| \times 2$ viele Zeilen, die besagen: Probiere jeden

Nachfolger

Allgemeinere Auffassung von TM: müssen nicht immer halten.

Das obige Rezept der Übersetzung der Tafel der nicht det. Maschine in eine det. Tafel liefert: Wenn die nicht det Maschine auf einem Ast akzeptiert, dann akzeptiert die det Maschine.

Die det. Maschine stoppt genau dann nicht, wenn es keinen einzigen akzeptierenden Ast gibt.

Korollar: $A \subseteq \Sigma^*$. Äquivalent sind

1. Es gibt ein TM M, s.d. $A = A(M)$.
   (A ist Turing-berechenbar). rekursiv, effektiv, entscheidbar, berechenbar
2. Es gibt eine Mehrband-TM M', s.d. $A = A(M')$.
3. Es gibt eine nicht determ. TM M'', s.d $A = A(M'')$.

Zeitkomplexität

w Input.

Gesucht ist $f(|w|)$, s.d T angesetzt auf w in $f(|w|)$ vielen $\in \mathbb{N}$

Länge von w

Schritten stoppt.

Def: die „Groß-O-Schreibweise" und die klein-o-Schreibweise:

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wir schreiben $f = O(g)$:gdw

es ein $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ s.d. für alle hinreichend großen n $f(n) \leq c \cdot g(n)$.

$$\underbrace{\forall^{\infty} n}_{\text{für alle bis auf endl. viele}} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$f = o(g)$:$\Leftrightarrow$ f.a. $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein n_0 s.d.

f.a. $n \geq n_0$ $\quad f(n) \leq \varepsilon \cdot g(n)$

Beispiel: Die Zeitkomplexität folgender TM M, die

$$A(M) = \{ 0^k 1^k \mid k \geq 0 \}:$$

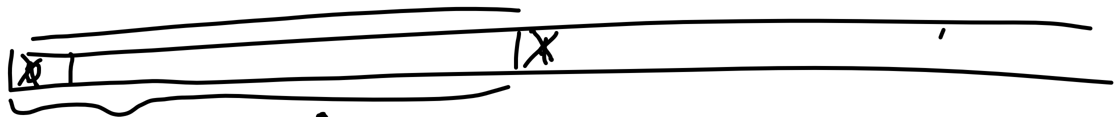
Sei w geg. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, x, \varepsilon\}$

1. Gehe das Band entlang, lehne w ab, falls eine 0 rechts von einer 1 steht. $|w|$

3. Wenn eine 0 aber keine 1 übrigbleibt, dann lehne ab. Sonst. Gehe zu 2.
   1 0
   Wenn kein Zeichen $\neq x$ übrigbleibt, dann akzeptiere.

2. Wenn es sowohl eine 0 als auch eine 1 gibt, gehe das Band entlang und streiche eine 0 und eine 1 ab.

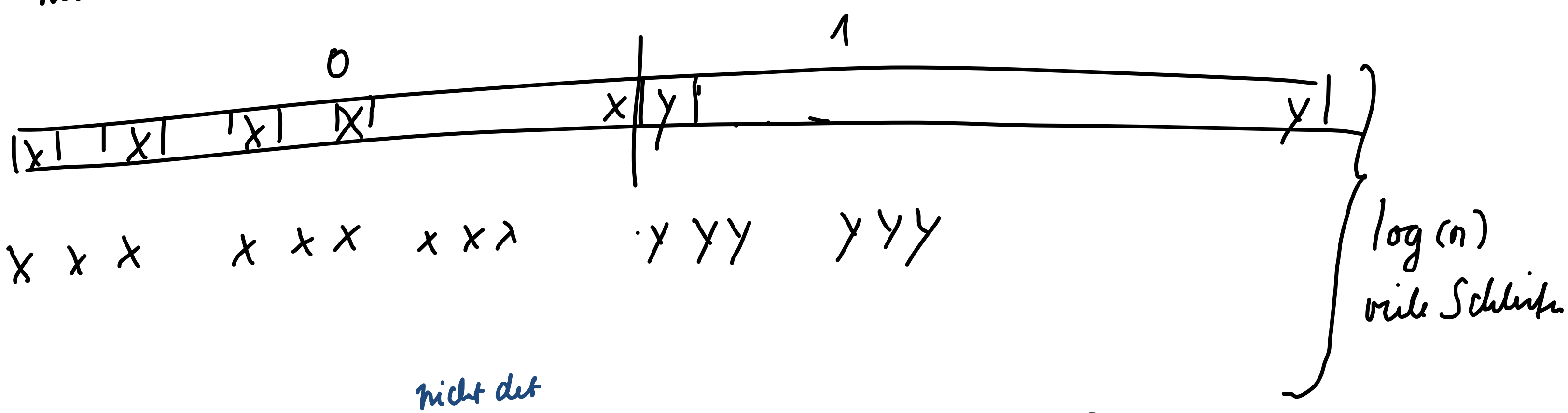
2|w| Schritte für einen Schleifendurchlauf



$|w|/2$ viele 0

Grob: $\left(1 + \frac{|w|}{2}\right) 2|w|$ Schritte. $O(|w|^2)$ viele Schritte.
$O(n^2)$

Beh: Es gibt eine M' von Zeitkomplexität $O(n \cdot \log(n))$ mit $A(M') = A(M)$.



Def: A ist von der (nicht det) Zeitkomplexitätskl. $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:gdw es gibt eine (nicht det) TM M der Zeitkomplexität t s.d. $A = A(M)$.

$$[N]ZEIT(t) = \{ A \subseteq \Sigma^* \mid A \text{ von von (nicht det.) Zeitkomplex. } t \}$$

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ZEIT(n^k)$$ die polynomiale Zeitklasse

$$NP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NZEIT(n^k)$$ die nicht det. polynomiale Zeitkl.

Satz Sei $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass f.a. n $t(n) \geq n$.

1. Jede t-Zeit-Mehrband TM M hat eine äquivalente $O(t^2)$-Einband-TM: M'. ~~M~~ ist äquivalent zu M' $:=$ $A(M) = A(M')$.

Beweisskizze: Die Bandverschiebung braucht $|w|$-Schritte
$\leq t +$ Länge des Eingabewortes viele Schritte.
$\leq 2t$

2. Jede nichtdet. t-Zeit-TM M hat eine äquivalente ~~$O(t$~~ $2^{O(t)}$-Zeit-TM.

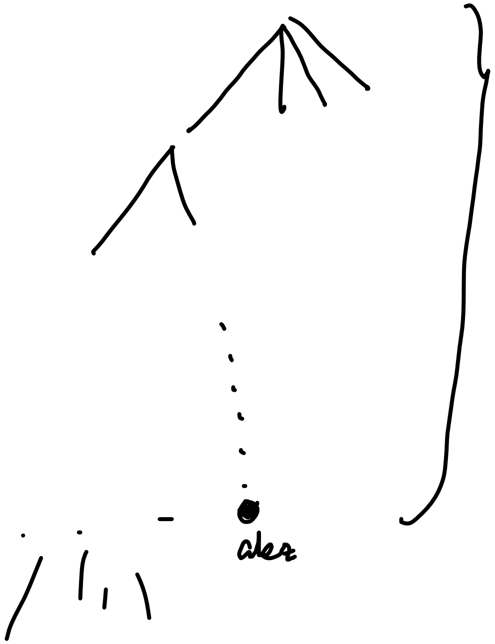
$$\left(O(2^t), \quad 2^{O(t)} \right)$$

$$2^{c \cdot 2^t}, \quad 2^{c \cdot t}$$

$$2^{c'} \cdot 2^t = 2^{c'+t}$$

Beweisskizze: Kinderzahl im nichtdet. Baum $\leq |Q \times \Gamma \times \{L, R\}|$

Q von M



Schrittzahl von M

t

Schrittzahl beim Absuchen des Baumes

k^t $\quad k = |Q \times T \times \{L,R\}|$

$k = 2^{k'}$ $\quad (2^{k'})^t = 2^{k' \cdot t}$

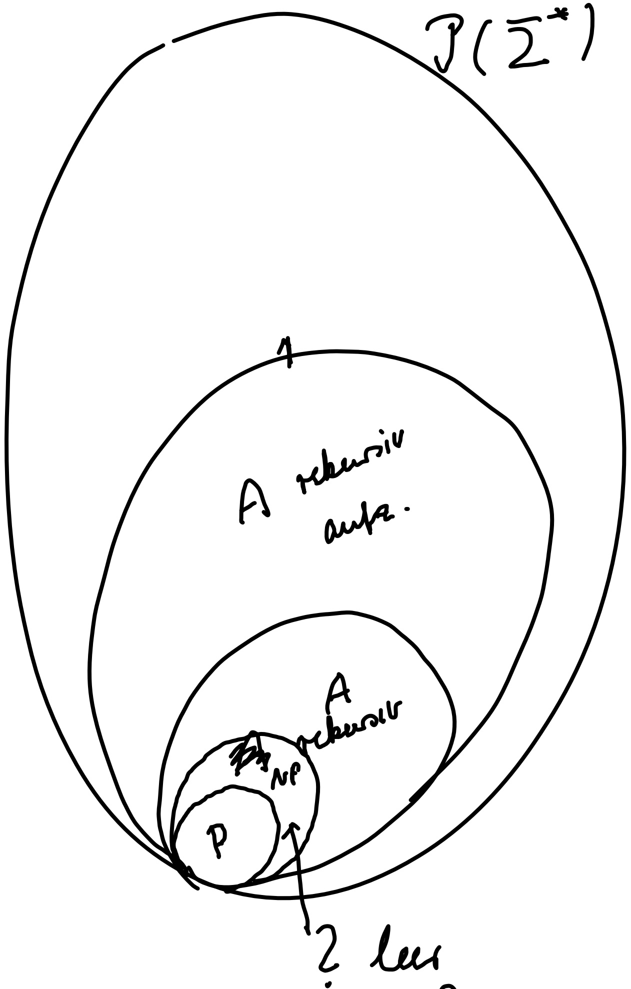
- $NP = P$ Beweisversuch durch das Rezept des obigen Beweises:

$t = n^k$ für ein k $\quad \ldots \quad 2^{O(n^k)}$

Exponentieren wächst schneller als jedes Polynom:

f.a. k ex x_0 f.a. $x \geq x_0$ $\quad e^x \geq x^k$ $\quad 2^x \geq x^k$

$k^x \geq x^k$ für $x \geq k$.



$$Co(NP) = \{ \Sigma^* \setminus A \mid A \in NP \}$$

Vertex

Beispiele für Probleme in P:

<u>Def</u>: Ein gerichteter Graph ist eine Struktur (V, E) aus einer endl. Menge V und einer Menge $E \subseteq V \times V \setminus \{(v,v) \mid v \in V\}$

v_1, v_2

$V = \{1, 2, 3, 4\}$