11\. 1. 2012

3-SAT ist NP-vollständig

SAT = $\{ \varphi \mid \varphi$ aussagenlog. Formel, in KNF φ erfüllbar $\}$

3-SAT = $\{ \varphi \mid \varphi$ ist in 3-KNF, φ erfüllbar $\}$
2 2

Satz 2-SAT ist in P.

Beweis: φ 2KNF

$$\varphi = \bigwedge_{i<I} (a_{i,1} \vee a_{i,2}) \quad (A_0 \vee A_0)$$

, $a_{i,j}$ Satzvariable oder neg. Satzvariable $A_0, \ldots, A_n$

$n \leq |\varphi|$

Wir bilden einen Graphen (V, E), der φ gut beschreibt:

$$V = \{A_i \mid i \leq n\} \cup \{\neg A_i \mid i \leq n\}$$

gerichtete Kanten:

$\big((a,b) \in E$ und $(\neg b, \neg a) \in E\big)$ gdw $(\neg a \vee b)$ ein Konjunktionsglied von φ

für $a, b \in V$

$$\begin{array}{c} \\ A_i \\ \\ \neg A_i \end{array} \begin{array}{c} b = \neg A_0 \quad \cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$2n \times 2n$

Matrix über $\{0,1\}$

$O(n^2)$

$\neg a \vee b$ ~~ist~~ als Konjunktionsglied von φ ist äq zu $a \to b$

$\neg b \vee c$ " $b \to c$

also folgt $a \to c$ auf φ und könnte als zusätzliche Kante

in die Matrix eingetragen werden.

1. $E = F_0$ s Schrittnummerierung $v_0 = \emptyset$

2. Sei (V, F_s) gegeben, $F_s \supseteq E$, $v_s \supseteq v_0$ $v_s : \{A_0, \dots, A_{n-1}\} \to \{F, W\}$

partielle Wahrheitsbel. geg.

Seien ~~x~~ $a, b, c \in V$ nun geg. in einer Aufzählung von V^3, $(2n)^3$

s.d. jedes Tripel $(2n)^2$ oft vorkommt

$(a, b) \in V^2$, $(c, d) \in V^2$ $O(n^5)$

Nehme (a,c) in $\underline{F_{s+1} \setminus F_s}$ auf, g.d.w. $(a,b) \in F_s$ und $(b,c) \in F_s$ und $(a,c) \notin F_s$.

- Falls $v_s(a) = W$ und $(a, b) \in F_{s+1}$, dann $v_{s+1}(b) = W$.

Falls $(a, \neg a) \in F_{s+1}$, so $v_{s+1}(a) = F$

$(\neg a, a) \in F_{s+1}$, so $v_{s+1}(a) = W$

$a \to \neg a$

$\neg a \vee \neg a$

höchstens $(2n)^2$ viele Schleifendurchgänge

- Falls $v_s(a) = W$ und $(a, \neg b) \in F_{s+1}$, dann $v_{s+1}(b) = F$

Falls $(\neg a, a) \in F_{s+1}$, so $v_{s+1}(a) = W$.

Falls $v_s(a) = F$ und $(\neg a, b) \in F_{s+1}$, dann $v_{s+1}(b) = W$

Falls $v_s(a) = F$ und $(\neg a, \neg b) \in F_{s+1}$, dann $v_{s+1}(b) = F$

3. Falls $F_{s+1} \underset{\neq}{\supset} F_s$ und $\underbrace{v_{s+1} \text{ eine partielle Wahrheitsbel. ist}}$,

$\iff \neg\exists a \quad v_{s+1}(a) = W$ und $v_{s+1}(a) = F$

dann gehe zu Schritt 2.

4. Sonst: $F_{s+1} = F_s$ und $v_s = v_{s+1}$ ist eine partielle Wahrheitsbel.

Dann ist φ erfüllbar.

$\exists v \quad \bar{v}(\varphi) = W.$

$\exists v \geq v_s \quad \bar{v}(\varphi) = W$

Algorithmus zur Vervollständigung von v_s: r. Schritt $r=0$

5. Sei i min. mit $\# A_i \notin Def(v_{s+r})$

Setze $v'_{s+r+1}(A_i) = W$. Wiederhole Schritte 2 mit den v'_{s+r+1} als Information mit F_{s+r} und erhalte so v_{s+r+1}.

$O(n^5)$

Falls v_{s+r+1} nicht total, (auf $A_0, \ldots, A_n$ def.) so wiederhole Schritt 5.

Sonst: $\bar{v}_{s+r+1}(\varphi) = W$.

Begründung: $\bar{v}_{s+r+1}$ respektiert $\bar{F}_s$ also auch E.

$O(n) \cdot O(n^5)$

Anzahl der Schleifendurchg. durch Schritt 5

Entscheidung in $O(n^9)$.

Zur Berechnung von v: etwa $O(n^9)$.

Hamiltonpfade:

1971 Karp: 22 „berühmte" NP-vollständige Probleme

$NP = \{ A(M) \mid M$ Turingm. in NP-Zeit $\}$

$= \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid A$ ist in polynomieller Zeit auf 3-SAT reduzierbar $\}$

$= \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid A$ auf Hamiltonpfad reduzierbar $\}$

Hamiltonpfad $= \{ (V, E, s, t) \mid$ Es gibt einen Pfad von s nach t, der jedes $v \in V$ genau einmal trifft $\}$

Hamiltonpfad $\in NP$

Hamiltonpfad $\leq_{\text{Polynom}}$ 3-SAT.

3-SAT $\leq_{\text{Polynomiell}}$ Hamiltonpfad.

für KNF

$\varphi = \bigwedge_{i \le n} C_i$

C_i Klauseln $\quad C_i = \bigvee_{j \le m_i} a_{ij} \quad a_{ij}$ Satzva.
oder neg. Satzv.

Aufgabe Berechne einen Graphen $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi, s_\varphi, t_\varphi)$

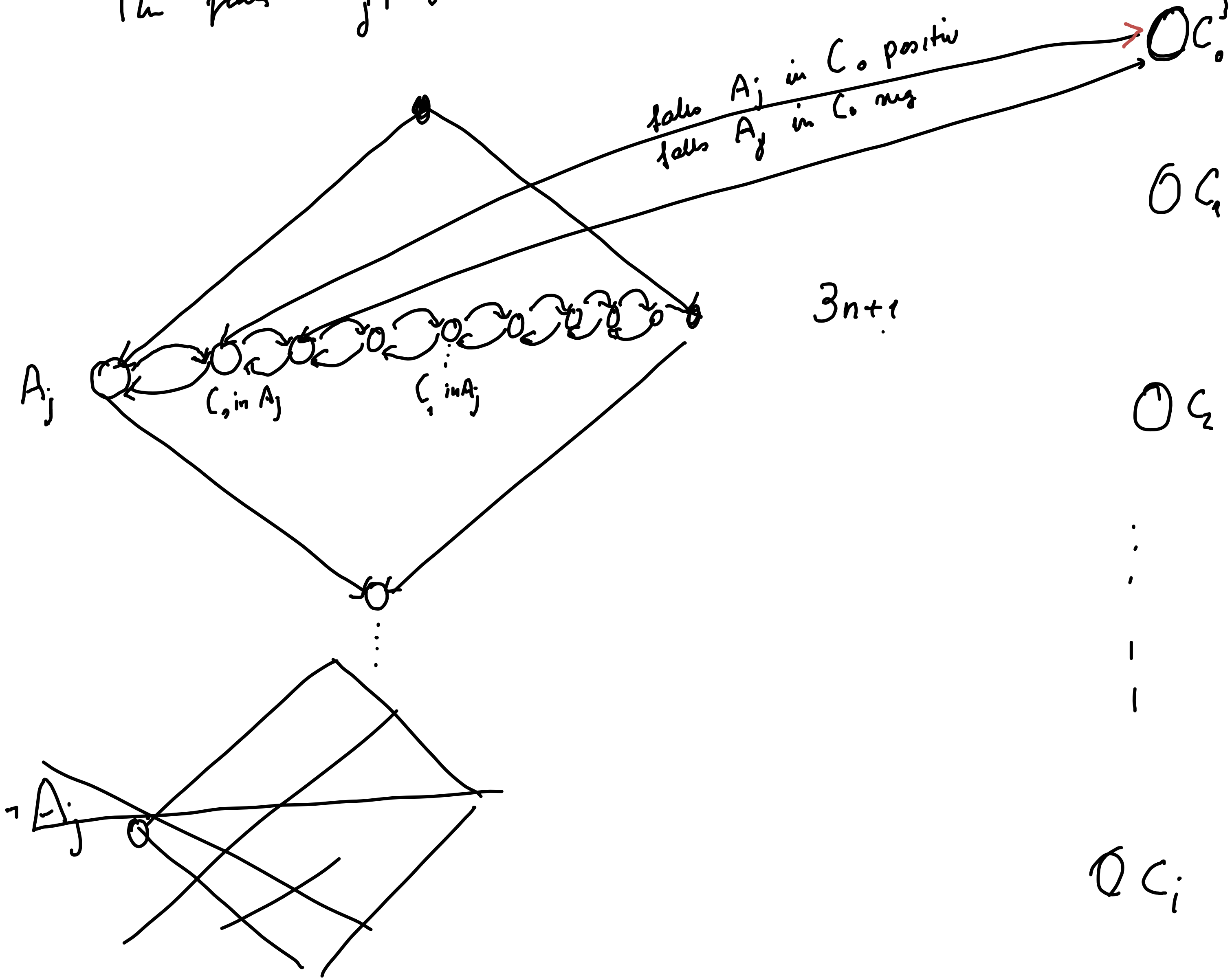
s.d. gilt G_φ hat einen Hamiltonpfad gdw. φ erfüllbar.

Seien $A_0, \ldots, A_r$ die Satzva. in φ.

Für jedes A_j, $j \le r$

Für jedes C_i, $i \le n$

$n \le |\varphi|$



φ ist erfüllbar gdw. G_φ einen Hamiltonpfad hat. $\square$

3. Kapitel: Die Logik der ersten Stufe

Prädikatenlogik

$\mathcal{L}$

Logische Symbole:

0. Klammern ( )
1. Junktoren $\wedge, \neg, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Variablen $v_0, v_1, \ldots$
3. Gleichheitszeichen $=$
4. Quantor(en) $\forall, \exists$

Nichtlogische Symbole: Die Menge τ, signature

$\mathcal{L}(\tau)$

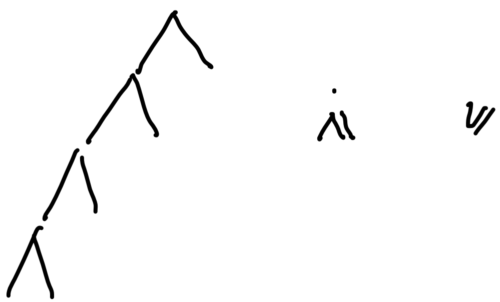
1. Prädikatsymbole.

Für jedes $n>0$ eine (leere, endl. oder unendliche) Menge von n-stelligen Prädikatsymbolen

Beispiel: $n=2$ Ein Symbol E für Kante

Exy x ist mit y durch eine Kante verbunden.

$n=2$ $<$ $x<y$ zur Beschreibung von linearen Ordnungen



2. Konstantensymbole. keine Stelligkeit

Eine Menge von Symbolen

Konstante

Beispiel: $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Zweck der Konstanten: Beschreibung eines Elements der Grundmenge.

3. Funktionssymbole

Für jedes $n > 0$ eine Menge von n-stelligen Funktionssymbolen.

Beispiel

$$\tau = \underbrace{\{ P_i^n \mid i \in \mathbb{N}, n > 0 \}}_{\text{Prädikatssymbole}} \cup \{ c_i \mid i \in \mathbb{N} \} \cup \{ f_i^n \mid i \in \mathbb{N}, n > 0 \}$$

$$\tau_{Graph} = \{ E \}$$

E zweistelliges Relationssymbol

$$\tau_{Arithmetik} = \{ <, 0, 1, S, +, \cdot, \exp \}$$

$S(n) = n+1$

$$\tau_{Gruppe} = \{ \circ \}, \quad \{ \circ, e \}, \quad \{ \circ, {}^{-1}, e \}$$

Terme und Formeln

Def τ-Term

1. Jedes Konstantensymbol und jede Variable ist ein Term.
2. Wenn $f \in \tau$ ein n-stelliges Funktionssymbol ist, und wenn $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist $f t_1 \ldots t_n$ ein Term.

(3. Nur Zeichenreihen, die nach Klauseln 1. und 2. Term sein müssen, sind Term.)

Beispiel: $\tau = \{+\}$ $\quad +$ 2-stellig

$+ v_0 v_1 \qquad (v_0 + v_1) + (v_2 + v_3)$

$+ \underbrace{+ v_0 v_1}_{\vdots} \underbrace{+ v_2 v_3}$

Lemma Kein Term ist ein echtes Anfangsstück eines anderen Terms.

Bew: über den Aufbau der Terme.

$t_1 = a_0 \ldots\ldots a_r$

$t_2 = a_0 \ldots\ldots a_r a_{r+1}$

$t_1 = \square$ kein Term

$t_2 = a_0$, aber t_1 ist ein echtes Anfangsstück von t_2.

Induktionsanf.: c_i, v_j Beh. stimmt.

Induktionsschritt $f t_1 \ldots t_n$

echtes Anfangsstück: $\square$ kein Term

$f t_1 \ldots t_k t'_{k+1}$, t'_{k+1} Anfang von t_{k+1}

$k+1 \leq n$ und t'_{k+1} echt

oder $k+1 < n$ $\square$