homepage

home.mathematik.uni-freiburg.de/mildenberger/veranstaltungen/
ws11/logikfuerinfo_ws100..

1. Kapitel: Aussagenlogik

<u>Def</u> Die Symbole der Aussagenlogik sind

(a) Klammern ( )

(b) Junktoren $\neg$ nicht

$\wedge$ und

$\vee$ oder

$\rightarrow$ wenn dann

$\leftrightarrow$

(c) Satzsymbole, auch Variable genannt:

$A_0, A_1, A_2, \dots$

$\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

<u>Def</u>: Ein Ausdruck ist eine endlich lange Folge von Symbolen.
Zeichenreihe

<u>Def</u>: Wir definieren die Menge der Formeln der Aussagenlogik

wie folgt:

(a) Jedes Satzsymbol ist eine Formel.

(b) Wenn α, β Formeln sind, dann sind auch $\neg\alpha$

$$(\alpha \wedge \beta)$$
$$(\alpha \vee \beta)$$
$$(\alpha \rightarrow \beta)$$
$$(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

Formeln

(c) Kein Ausdruck ist eine Formel, wenn ~~sie~~ er es nicht aufgrund von
(a) oder (b) sein muss.

Def 1.4 Sei f eine n-stellige Funktion, deren Definitionsbereich eine Menge ist. ~~Die~~ Eine Menge M heißt unter f abgeschlossen $:\Leftrightarrow$ für alle $\vec{m} \in M^n$ gilt: $f(\vec{m}) \in M$.

Kurz: $f'' M^n = f[M^n] \subseteq M$.

$$\begin{array}{c} f'' M^n \\ \parallel \\ \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in M^n \} \end{array} \qquad \mathrm{im}(f), \quad \mathrm{im}(f \upharpoonright M^n)$$

$f(x) \neq f'' x$ ist möglich.

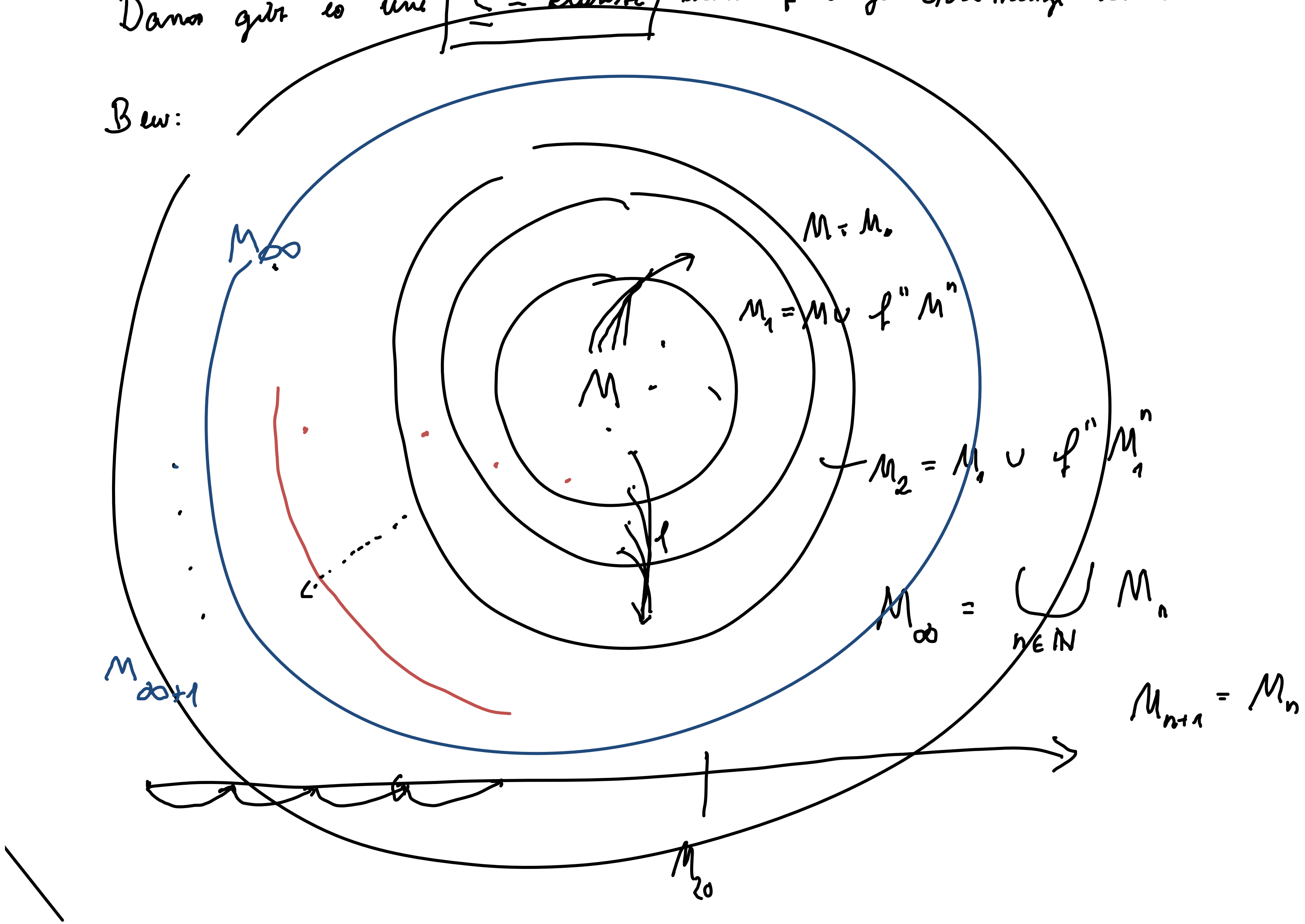
$x = \{1\}$

$f(1) = 1, \quad f(\{1\}) = 2$

$f''\{1\} = \{f(1)\} = \{1\}$.

Lemma Sei M eine Menge, $n \in \mathbb{N}$, und sei f eine n-stellige Fkt.
Dann gibt es eine $\boxed{\subseteq\text{-kleinste}}$ unter f abg. Obermenge von M.

Bew:



In unserer ersten Anwendung

$$\mathcal{M} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

fünf verschiedene f:

$$\neg$$
$$(\cdot \wedge \cdot)$$
$$(\cdot \vee \cdot)$$
$$(\cdot \rightarrow \cdot)$$
$$(\cdot \leftrightarrow \cdot)$$

<u>Satz 1.6.</u> Induktionsprinzip für Formeln. Wenn eine Eigenschaft für die Satzsymbole wahr ist und bei Anwendung der Junktoren erhalten bleibt, dann haben alle Formeln diese Eigenschaft.

Lemma: Jede Formel hat gleich viele Linksklammern wie Rechtskl.

Beweis: Wahr für die Satzsymbole

Wenn α gleich viele L.Kl. wie R.Kl. hat, ~~und~~ dann hat $\neg\alpha$ gleich viele LKl. wie RKl.

Wenn α gleich viele LKl. wie RKl. hat, und β gleich viele LKl. wie RKl. hat, dann hat $(\alpha \wedge \beta)$ gleich viele LKl. wie RKl.

$x \quad x \quad y \quad y$

L ~~Rechtskl.~~ $1 + x + y$

L.R $x + y + 1$

Lemma 1.8. Keine Formel ist ein echtes Anfangsstück einer ~~andern~~ Formel.

a b a : - - - |

Beweis: Induktiv über den Aufbau der Formeln.

Beh: Kein echtes Anfangsstück von α ist eine Formel. ε

$\square$

Induktion über den Aufbau von α. b

$\emptyset$

Anfang: $\alpha = A_i$. Einziges echtes Anfangsstück von A_i ist $\sqcup$

$\cancel{A_1}$ $\cancel{A_{10}}$

Induktionsschritt: $\neg\alpha$ Echtes Anfangsstück von $\neg\alpha$

hat die Form $\neg$

$\neg\gamma$ und γ ist ein echtes Anfangsstück von α

γ ist nach Ind.-vor. keine Formel. Also ist $\neg\gamma$ keine Formel.

$(\alpha \vee \beta)$. Jeder echte Anfangsabschnitt von $(\alpha \vee \beta)$ hat die Form

1. Fall $(\gamma$" und γ ist ein echter Anfangsabschnitt von α

" $\cancel{(\beta \vee \delta)}$

$\gamma = \alpha$

$\gamma = \alpha \vee$

Beh: (*) Jedes nichtleere echte Anfangsstück einer Formel
hat entweder nur $\neg$ - Zeichen oder
es hat echt mehr Linkskl. als Rechtskl.

2. Fall: Der Anfangsabschnitt ragt echt in β hinein.
hat die Form: $(\alpha \vee \gamma$ und γ ist ein echtes Anfstück von β
$\gamma = \beta$

$(\alpha \vee \beta$

Polnische Notation: $\wedge \alpha \beta \;\hat{=}\; (\alpha \wedge \beta)$

Lemma: Formeln in poln. Notation sind eindeutig lesbar.

$\neg(\alpha \wedge \beta)$

Wahr~~ad~~heitsbelegungen

W	wahr	0	1	t
F	falsch	1	0	f

$\overline{\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$

Def Eine Wahrheitsbelegung v für eine Menge $\mathcal{S}$ von Satzsymbolen ist eine Funktion: $v : \mathcal{S} \to \{W, F\}$

Bemerkung auf $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gibt es $2^{\mathbb{N}}$ viele
$|\mathbb{R}|$ viele Wahrheitsbelegungen

Auf $\{A_n \mid n < k\}$ gibt es 2^k Wahrheitsbelegungen.

Satz Induktionsprinzip für Definitionen

Induktion über den Aufbau der Formeln lassen sich Eigenschaften von Formeln oder Funktionen auf den Formeln zu definieren, indem man die Eigenschaft/Funktion auf den Satzsymbolen definiert, und indem man definiert, wie sich die Eigenschaft/Funktion auf Junktorenschritte erweitert.

Eine Anwendung vom Induktionsprinzip:

Erweiterung der Wahrheitsbelegung.

<u>Def</u>: $\bar{v} \supseteq v$ wird def. durch

$\bar{v}(A) = v(A)$ für $A \in \mathcal{S}$

$\bar{v}(\neg\alpha) = W$:gdw $\bar{v}(\alpha) = F$

$\bar{v}(\alpha \overset{\wedge}{\vee} \beta) = W$:gdw ($\bar{v}(\alpha) = W$ und/oder $\bar{v}(\beta) = W$)

$\rightarrow$:gdw (wenn $\bar{v}(\alpha) = W$ dann $\bar{v}(\beta) = W$)

$\bar{v}(\alpha) = F$ oder $\bar{v}(\beta) = W$

$\leftrightarrow$:gdw ($\bar{v}(\alpha) = W$ gdw $\bar{v}(\beta) = W$)

$\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$

$\alpha \to \beta$	W	F
W	W	F
F	W	W

Beispiel: $v(A_1) = v(A_2) = W, \quad v(A_6) = F$

$$\alpha = \underbrace{(A_2 \to \underbrace{(A_1 \to A_6)}_{F})}_{F} \leftrightarrow \underbrace{(\underbrace{(A_2 \wedge A_1)}_{W} \to A_6)}_{F}$$

$\tilde{v}(\alpha) = W$

Def: $\bar{v}(\alpha) = W$

v erfüllt α

$\bar{v}$ erfüllt α

α ist wahr unter der Belegung v.

$\bar{v}(\alpha)$ = undef., falls in α ein $A_n \notin \mathcal{S}$ vorkommt, $\mathcal{S}$ = Defber. von v

---

<u>Def</u>: $\top = (A_0 \vee \neg A_0)$

$\bot = (A_0 \wedge \neg A_0)$

(Tautologische) Implikation und äquivalente Formeln:

Def: Σ ~~sein~~ sei eine Formelmenge.

<u>Σ</u> impliziert τ :gdw f.a. Wahrheitsbelegungen v, die alle

Symbole in Σ und alle Symbole in τ entsprechen gilt:

(Wenn f.a. $\sigma \in \Sigma$ $\bar{v}(\sigma) = W$), dann $\bar{v}(\tau) = W$.