1. Gruppe Di 10 – 12 Herr Anselm Hudde
anselmhudde@gmx.de

2. Gruppe Di 10 – 12 Herr Pascal Raiola
pascal-raiola@gmx.de

3. Gr. Mo 12 – 14 Herr Jan Leike
jan.leike@venus.uni-freiburg.de

4. Gruppe NEU Di 12 – 14 Herr Tim Zander
tim.zander@saturn.uni-freiburg.de

2.11.2011 Vorlesung

Wdh.: $\Sigma \models \tau$

$\Sigma$ Menge ~~von~~ aussagenlog. Formeln, $\tau$ Formel

$\Sigma \models \tau \;:\Longleftrightarrow$

f.a. $v : \mathcal{S}(\Sigma, \tau) \to \{W, F\}$ gilt

$\big( (\text{f.a. } \sigma \in \Sigma \;\; \bar{v}(\sigma) = W) \to \bar{v}(\tau) = W \big)$

Statt $\{\sigma\} \models \tau$ schreiben wir $\sigma \models \tau$

Def: $\tau$ heißt allgemeingültig, wenn $\emptyset \models \tau$.

(anders gesagt: f.a. $v : \mathcal{S}(\tau) \to \{W, F\}$, $\bar{v}(\tau) = W$.

$\tau$ heißt erfüllbar $:\Longleftrightarrow$ ex $v : \mathcal{S}(\tau) \to \{W, F\}$ $\bar{v}(\tau) = W$

Beispiele: $\top = A_0 \vee \neg A_0$ ist allgemeingültig

$\bot = A_0 \wedge \neg A_0$ ~~is~~ ist nicht erfüllbar

$A_0$ ist erfüllbar

**Def**: $\sigma \equiv \tau$

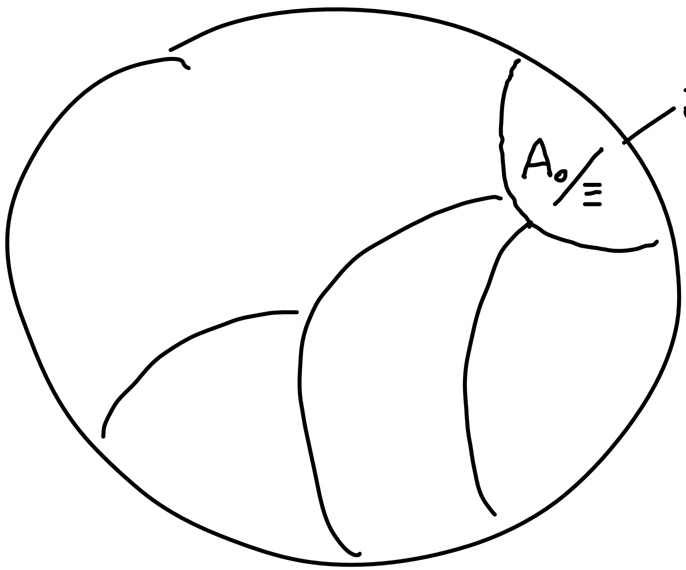
$\sigma$ ist tautologisch äquivalent zu $\tau$ $:\Leftrightarrow$ $\sigma \models \tau$ und $\tau \models \sigma$.

**Bem** $\equiv$ ist eine Äquivalenzrel.

$\sigma \equiv \sigma$

$\sigma \equiv \tau$ und $\tau \equiv \gamma \Rightarrow \sigma \equiv \gamma$

wenn $\sigma \equiv \tau$, dann $\tau \equiv \sigma$

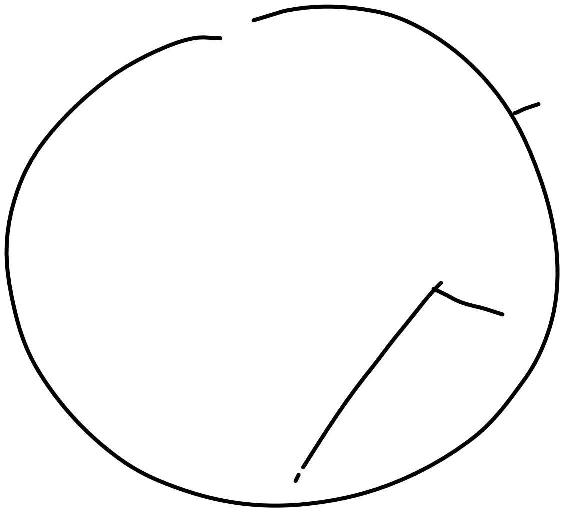



Aussagenlogik zu $\mathcal{S}$

$$A_0/_\equiv = \{ \varphi \mid \varphi \equiv A_0 \}$$

$$A_0 \equiv (A_0 \wedge A_0) \equiv (A_0 \wedge A_0 \wedge A_0)$$
$$\equiv (A_0 \wedge \top)$$

5 Aussagenvariablen $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\} = S$



$\mathcal{L}(S)$

$2^{2^5}$ $\qquad 2^{\left(2^{|\mathbb{N}|}\right)}$

$(A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \dots \wedge A_4) \vee$

$(A_0 \wedge A_1 \dots\dots A_4)$

$\cancel{A_3}$.

$$\bigvee \left( \bigwedge_{i=0}^{4} A_i^{v(i)} \right)$$

$v: \{A_0, \dots A_4\} \to \{0,1\}$

Bemerkung: $\sigma \equiv \tau$ gdw $\emptyset \models \sigma \leftrightarrow \tau$

$\sigma$ ist allgemeingültig $\Leftrightarrow$ $\emptyset \models \sigma$

$\sigma$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\sigma \not\equiv \bot$

$\equiv$ ist eine Äq rel. auf der Menge der Formeln.

Junktoren: $\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

$\perp$

**Def** Eine Junktorenmenge heißt vollständig, :wenn zu jeder Formel $\sigma$ eine äquivalente Formel $\tau$ ex., die nur Junktoren aus $J$ enthält.

Duale Formel: Sei $\varphi$ eine Formel, die aus $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\top$, $\perp$ aufgebaut ist.

$\varphi^*$ entsteht aus $\varphi$, indem man $\neg$ weglässt, pos. Formeln negiert,

$\vee$ durch $\wedge$ ersetzt. $\varphi^*$ heißt die duale Formel.

$\wedge$ durch $\vee$

$\top$ durch $\perp$

$\perp$ durch $\top$

Lemma: Wenn $\varphi \equiv \psi$, $\varphi^* \equiv \psi^*$.

<u>Satz</u>: Für Variable $A, B, C$ gilt „Grundäquivalenzen"

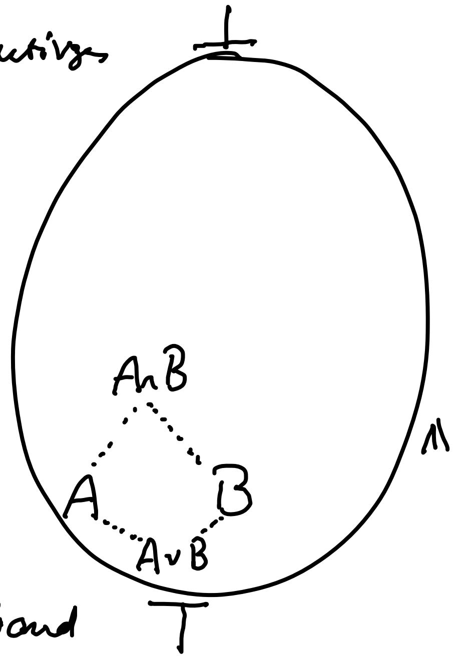
$A \wedge A \equiv A$ Idempotenz

$A \wedge B \equiv B \wedge A$ Kommutativität

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ Assoziativges.

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ Absorptionsges. $\emptyset \models \underline{A} \rightarrow (A \vee B)$

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Distributivges.




$\bot \wedge A \equiv \bot$ „kleinstes" El.
$\bot \vee A \equiv A$

$\top \wedge A \equiv A$ „größtes" El.

$\underbrace{(\text{Grundmenge}}, \wedge, \vee)$ Verband

$(\text{Formeln}, \wedge, \vee)$ bilden einen distributiven Verband

$$\bigwedge_{i \in I} \varphi_i := \varphi_{i_0} \wedge \dots\dots \wedge \varphi_{i_{n-1}} \quad \text{falls } I = \{i_0, \dots, i_{n-1}\}$$

steht als Abkürzung für

$$(\dots\dots(((\varphi_{i_0} \wedge \varphi_{i_1}) \wedge \varphi_{i_2}) \wedge \varphi_{i_3}) \dots\dots - \varphi_{i_{n-1}})$$

$$\bigwedge_{i \in \emptyset} \varphi_i := \top$$

$$\bigvee_{i \in \emptyset} \varphi_i := \bot$$

__Def__ „Ersetzung"

Seien $\varphi$, $\psi$ Formeln, $A$ Variable. Dann wird $\varphi(A \setminus \psi)$ „$\varphi$ $A$ ersetzt durch $\psi$" definiert, indem alle $A$ in $\varphi$ durch $\psi$'s ersetzt werden.

Beh: $\varphi(A\backslash\psi)$ ist eine Formel.

äußeren Klammern

Bew: Induktiv über den Aufbau $\varphi$

$A \rightsquigarrow \psi$

---

**Lemma** Ersetzungslemma Sei $\varphi \equiv \varphi'$, $A$ Variable, $\psi$ Formel.

Dann ist $\varphi(A\backslash\psi) \equiv \varphi'(A\backslash\psi)$ und

$\psi(A\backslash\varphi) \equiv \psi(A\backslash\varphi')$

---

**Lemma** $\varphi \vee \neg\varphi$ ist allgemeingültig.

$A_0 \vee \neg A_0$

**Satz:** de Morgan'sche Regeln

$$\neg\neg A \equiv A$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B.$$

**Def:** Literal: Satzvariable oder neg. Satzvariable

**Def:** Eine aussagenlog. Formel $\varphi$ ist in disjunktiver Normalform:
konjunkt.
gdw ein $k \in \mathbb{N}$ gibt und $m_i \in \mathbb{N}$ gibt, $i<k$, und Literale $A_{i,j}$, $i<k$, $j<m_i$ gibt, s.d.

$$\varphi = \bigvee_{i<k} \bigwedge_{j<m_i} A_{i,j}$$

$$(\neg)\, A_{\underbrace{f(i,j)}_{\in \mathbb{N}}}$$

$$\bigwedge_{i<k} \bigvee_{j<m_i} A_{i,j}$$

<u>Satz</u>: Jede Formel $\varphi$ ist zu einer Formel in konjunktiver NF äq. und jede Formel ist zu einer Formel in disj. NF äq.

Bew: Induktion über den Aufbau von $\varphi$

Anfang: $\varphi = A_i$
$\varphi = \neg A_i$

Induktionsschritt. $\neg$ – Nicht:

$\varphi \to \psi$
$\neg\varphi \vee \psi$

$$\varphi \equiv \bigwedge \bigvee A_{i,j} \equiv \bigvee \bigwedge B_{i,j}$$

$$\neg\varphi \equiv \bigvee \bigwedge \neg A_{i,j} \equiv \bigwedge \bigvee \neg B_{i,j}$$

$\chi = (\varphi \wedge \psi)$

$\wedge$ – Schritt für disj NF

$$\underbrace{\Big(\bigvee_{i} \bigwedge A_{i,j}\Big)}_{\equiv\,\varphi} \wedge \underbrace{\Big(\bigvee_{i'} \bigwedge B_{i',j'}\Big)}_{\equiv\,\psi} \underset{\text{de Morg.}}{\equiv} \bigvee_{\substack{i<k \\ i'<k'}} \underbrace{\Big(\bigwedge A_{i,j} \wedge \bigwedge_{j\ldots} B_{i',j'}\Big)}_{\text{konj.}}$$

Korollar ($\sigma \equiv \tau$ gdw $\models \sigma \leftrightarrow \tau$)

Jede Äquivalenz lässt aus den Grundäquivalenzen und den de Morgan'schen Regeln und dem Ersetzungslemma herstellen.

$\sigma \equiv \tau$ Absorp…

$\sigma \equiv$ disj NF von $\sigma$ $\equiv$ disj NF von $\tau$ $\equiv \tau$

$\bigvee_i \bigwedge_j A_{ij}$ $\bigvee_i \bigwedge_j B_{i,j}$

$A_0 \wedge A_1 \dots \wedge A_n$

## Kompaktheit

!

Ziel: $\Sigma$ ist erfüllbar gdw. jede endl. Tm von $\Sigma$ erfüllbar ist.

Wenn $\Sigma \models \tau$, dann gibt es ein endl Tm. $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, s.d. $\Sigma_0 \models \tau$

**Def**: Eine Menge $X$ heißt **abz** :gdw es eine Fkt. $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{auf}} X$

$$X = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$f(n) = x_n$$

**Def** Eine Menge $X$ heißt abzählbar' :gdw es eine Injektion $f: X \xrightarrow[1-1]{} \mathbb{N}$ gibt

**Lemma**: abz $\Leftrightarrow$ abz'.