Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik

Heike Mildenberger

Fassung vom 4.5.2015

Inhaltsverzeichnis

Dies ist ein Skript zur Vorlesung "Mengenlehre: Kardinalzahlenarithmetik" im Wintersemester 2012/13 von Frau Prof. Dr. Heike Mildenberger an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg digitalisiert von Pascal Raiola. Überarbeitet im Sommer 2013 und im Frühjahr 2015 durch Heike Mildenberge. Bitte schreiben Sie an heike.mildenberger at math uni-freiburg de, wenn Sie Fehler finden.

Version vom 28.4.2015

Kapitel 1

Einführung

Quellen: [1, 2, 5, 8, 11].

Definition 1.1.

- $(Q, <)$ heißt Quasiordnung , wenn $<$ irreflexiv und transitiv ist.
- $(H, <)$ heißt Halbordnung , wenn $<$ irreflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Die Antisymmetrie sagt: Für alle $x, y \in H$ gilt: Falls $x \leq y$ und $y \leq x$ so $x = y$.

Im Folgenden steht H für eine Quasiordnung.

Definition 1.2 (konfinal)**.**

- $C \subseteq H$ heißt konfinal in H gdw.

$$\forall h \in H \; \exists c \in C. \;\; c \geq h$$

- $\mathrm{cf}(H) = \min\{|C| : C \text{ konfinal in } H\}$ heißt die *Konfinalität von* H.

Wiederholung 1.3. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$*, und allgemein* $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(H)) = \mathrm{cf}(H)$.

Definition 1.4 (regulär)**.** Eine Kardinalzahl κ heißt regulär, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Eine Kardinalzahl κ heißt im Gegenteil dazu singulär, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.

Satz 1.5. *(*ZFC*) Alle Nachfolgerkardinalzahlen sind regulär.*

Beispiel 1.6. $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$ *ist eine singuläre Kardinalzahl.*

Beispiel 1.7. *Die Konfinalität einer Halbordnung kann singulär sein, ein Beispiel hierfür ist* $(H, \leq)$ *mit*

$$H = \{(i, j) : i < \omega \wedge j \in \aleph_i\} \text{ und } (i, j) \leq (i', j') \leftrightarrow (i = i' \wedge j \leq j').$$

Definition 1.8 (wahre Konfinalität)**.** Sei $(H, \leq)$ eine Halbordnung, die wahre Konfinalität von $(H, \leq)$ ist definiert, falls es eine konfinale, durch $<_H$ linear geordnete Teilmenge $T \subseteq H$ gibt. Dann ist $\mathrm{tcf}(H)$ die minimale Mächtigkeit so einer Teilmenge H. Andernfalls ist $\mathrm{tcf}(H)$ nicht definiert.

Beispiel 1.9. *von Halbordnungen*

- $\aleph_0 \times \aleph_1 \times \aleph_2 \times \ldots = \prod_{n\in\omega} \aleph_n = \{f : \omega \to V : \forall n \in \omega f(n) \in \aleph_n\}$
- *Das Produkt von linearen Ordnungen:*

  $$(\aleph_0, <) \times (\aleph_1, <) \times \ldots = \prod_{n\in\omega} (\aleph_n, <) = (\{f : \omega \to V : \forall n \in \omega f(n) \in \aleph_n\}, <)$$

  $$f < g := \forall n f(n) < g(n)$$
  $$f \leq g := \forall n f(n) \leq g(n)$$

  Anmerkung: Aus $f \leq g$ und $f \neq g$ folgt <u>nicht</u> $f < g$.

Definition 1.10 ($<\mu$-gerichtet)**.** Sei μ eine Kardinalzahl, $(P, <_P)$ eine Halbordnung, dann heißt $(P, <_P)$ $<\mu$-gerichtet, wenn gilt:

$$\forall A \subseteq P \quad (|A| < \mu \to \exists t \in P \forall a \in A.\ a \leq t)$$

Lemma 1.11 (Pouzet)**.** *Sei P eine Halbordnung, dann sind äquivalent:*

a) $\mathrm{tcf}(P) = \lambda$

b) $\mathrm{cf}(P) = \lambda$ *und* $(P, <)$ *ist* $<\lambda$*-gerichtet.*

Beweis

- „a) $\Rightarrow$ b)“: Sei T eine lineare Ordnung mit $\mathrm{cf}(T, <) = \lambda$. Damit ist $\mathrm{cf}(P) \leq \lambda$.

  Sei nun $A \subseteq P$ beliebig mit $|A| < \lambda$. Da T konfinal ist, gibt es zu jedem $a \in A$ ein $t_a \in T$, so dass $a \leq t_a$. Die Folge der t_a ist eine lineare Ordnung der Länge $|A| < \lambda$, daher nach Voraussetzung nicht konfinal in P und somit durch ein $t_0 \in T$ beschränkt. Dieses t_0 bezeugt die $<\lambda$-Gerichtetheit, aus welcher $\mathrm{cf}(P) \geq \lambda$ folgt.

- „b) $\Rightarrow$ a)“: Sei C konfinal in P mit $|C| = \lambda$, ohne Einschränkung $C = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ mit $|A_\alpha| < \lambda$. Also gibt es wegen der $<\lambda$-Gerichtetheit zu jedem A_α ein t_α mit $(\forall \gamma < \alpha \forall a \in A_\gamma \cup \{t_\beta : \beta < \alpha\})(a \leq t_\alpha)$. Setze $T := \{t_\alpha : \alpha < \lambda\}$, dann ist T eine lineare Ordnung die konfinal in C und damit auch in P ist.

$\dashv$

Kapitel 2

Reduzierte Produkte

Notation 2.1. *Für jedes a aus einer Indexmenge A sei S_a eine lineare Ordnung mit $S_a \subset \mathbf{On}$.*

Definition 2.2 ($<_I$)**.** Sei $I \subseteq \mathscr{P}(A)$.

$$f <_I g = (\{a : \text{nicht } f(a) < g(a)\} \in I)$$

($f < g$ bis auf wenige Fehler)

Definition 2.3 (Ideal (kleine Mengen))**.**
$I \subseteq \mathscr{P}(A)$ heißt Ideal (über A oder auf A), wenn:

- $\emptyset \in I$
- $\forall C, B \in I.\ C \cup B \in I$
- $\forall C \in I \forall D \subseteq C.\ D \in I$

I heißt *echt, falls $A \notin I$.*

Definition 2.4 (Filter (große Mengen))**.**
$F \subseteq \mathscr{P}(A)$ heißt Filter (über A), wenn:

- $A \in F$
- $\forall B, C \in F.\ B \cap C \in F$
- $\forall C \in F \forall D \supseteq C.\ D \in F$

F heißt *echt falls $\emptyset \notin F$.*

Bemerkung 2.5. *Es gilt: I ist ein Ideal über A genau dann, wenn $\{A \setminus X : X \in I\}$ ein Filter ist und umgekehrt. I ist ein echtes Ideal genau dann, wenn $\{A \setminus X : X \in I\}$ ein echter Filter ist und umgekehrt.*

Definition 2.6 (Äquivalenzklassen)**.** Sei A der Definitionsbereich der Funktionen f und g.

$$(f \sim g) := (f =_I g) := (\{\alpha \in A : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in I)$$
$$[f]_I := f/I := f_\sim := \{h : h =_I f\}$$

Lemma 2.7. *$=_I$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\prod_{\alpha\in A} S_\alpha = \{f\colon A \to V : \forall\alpha \in A f(\alpha) \in S_\alpha\}$.*

Beweis Seien $f, g, h \in \prod_{\alpha\in A} S_\alpha$ beliebig.

- Reflexivität: $\{\alpha \in A : f(\alpha) \neq f(\alpha)\} = \emptyset \in I$ und daher $f =_I f$.
- Symmetrie: $f =_I g \Leftrightarrow \{\alpha \in A : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in I \Leftrightarrow \{\alpha \in A : g(\alpha) \neq f(\alpha)\} \in I \Leftrightarrow g =_I f$.
- Transitivität: Es gelte $f =_I g$ und $g =_i h$, also $\{\alpha \in A : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in I$ und $\{\alpha \in A : g(\alpha) \neq h(\alpha)\} \in I$. Da I ein Ideal ist, ist genauso $\{\alpha \in A : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \cup \{\alpha \in A : g(\alpha) \neq h(\alpha)\} \in I$, was eine Obermenge von $\{\alpha \in A : f(\alpha) \neq h(\alpha)\}$ ist. Damit ist wegen der Teilmengen-Eigenschaft für Ideale auch $\{\alpha \in A : f(\alpha) \neq h(\alpha)\} \in I$ und daher $f =_I h$.

$\dashv$

Lemma 2.8. *Sei I ein Ideal über A. Äquivalent sind:*

a) *I ist maximal.*

b) *$\forall B \subseteq A \quad (B \in I \vee A \setminus B \in I)$.*

Beweis Übung. $\dashv$

Definition 2.9. Maximale echte Filter heißen *Ultrafilter*.

Satz 2.10. *Das Primidealtheorem oder auch Ultrafiltertheorem genannt. Sei X eine Menge. Jeder echte Filter über X lässt sich zu einem Ultrafilter über X erweitern. Jedes echte Ideal über X lässt sich zu einem maximalen echten Ideal (auch Primideal genannt) über X erweitern.*

Beweis Die Menge $\{G \subseteq \mathscr{P}(X) : G \supseteq F, G \text{ Filter}\}$ zusammen mit der Inklusion ist eine induktive Halbordnung, d.h., eine Halbordnung, in der jede aufsteigende Kette eine obere Schranke hat. Nach dem Lemma von Zorn hat diese ein maximales Element. $\dashv$

Definition 2.11. Sei a eine Menge regulärer Kardinalzahlen.

$$\prod a = \prod_{\alpha\in a} a = \{f : f \in \mathbf{On}^a \wedge \forall\alpha \in a.\ f(\alpha) \in \alpha\}$$

Definition 2.12.

$$\prod S_\alpha/I = \prod (S_\alpha, <_{\mathbf{On}})/I = \left(\{[f]_I : f \in \prod_{\alpha\in A} S_\alpha\}, <_I\right)$$

$$[f]_I = \{h : h =_I f\} <_I [g]_I :\Leftrightarrow \{\alpha \in A : f(\alpha) \geq g(\alpha)\} \in I$$

Dies ist wohldefiniert, da I ein Ideal ist.

Beispiel 2.13.

- *1. Extremfall: I ist ein maximales Ideal, also* $\{a : f(a) > g(a)\} \in I$ *oder* $\{a : f(a) \leq g(a)\} \in I$. *Dann gilt*

$$[f]_I <_I [g]_I \text{ oder } [f]_I \geq [g]_I$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden Äquivalenzklassen $[f]_I$ häufig mit ihrem Repräsentanten f abgekürzt.

- *2. Extremfall: $I = \{\emptyset\}$, dann gilt $f <_{\{\emptyset\}} g \Leftrightarrow \forall \alpha \in A f(\alpha) < g(\alpha)$.*

Kapitel 3

Clubs und club guessing

Wir betrachten im Folgenden nicht die Klasse der Ordinalzahlen **On**, sondern eine genügend große Ordinalzahl κ.

Definition 3.1 (Ordnungstopologie)**.** Basis für die Menge der offenen Mengen $(\tau,\ \mathscr{O})$ auf κ ist die Menge der offenen Intervalle auf κ, also die Menge $\{(\gamma,\delta) : 0 \leq \gamma < \delta \leq \kappa\}$, wobei $(\gamma,\delta) = \{\varepsilon \in \kappa : \gamma < \varepsilon < \delta\}$.

Bemerkung 3.2. *Limesordinalzahlen sind die Limites in der Ordnungstopologie. Die aufsteigende Folge $\{\langle\alpha,\alpha\rangle : \alpha < \lambda\}$ hat den Grenzwert λ.*
In den Ordinalzahlen ist

$$\lim\langle\langle i,\alpha_i\rangle : i \in I\rangle = \lim\langle\alpha_i : i \in I\rangle \overset{!}{=} \sup\{\alpha_i : i \in I\} = \bigcup_{i\in I}\alpha_i = \bigcup\{\alpha_i : i \in I\} =: l$$

*für aufsteigende Folgen und für Folgen, die zumindest $\forall\gamma < l \exists i_0 \forall i \geq i_0 \alpha_i \geq \gamma$ erfüllen. (Da es in **On** nur Limites nach oben gibt, ist dies die einzige Möglichkeit, dass der Limes einer Folge nicht im Bild der Folge ist.)*

Definition 3.3 (Häufungspunkte)**.** Sei $X \subseteq \mathbf{On}$, X eine Menge, dann ist

$$\operatorname{acc}(X) = \operatorname{acc} X = \{\alpha \in \mathbf{On} : \alpha = \sup \underbrace{(X \cap \alpha)}_{\text{echt unter } \alpha}\}$$

Häufungspunkte sind Grenzwerte von Teilfolgen.

Definition 3.4 (abgeschlossen)**.** X heißt abgeschlossen, wenn $\operatorname{acc} X \subseteq X$ bzw. $\operatorname{cl}(X) = X$.

Definition 3.5 (drop, glue)**.** Sei $c \subseteq \mathbf{On}$, und sei $X \subseteq \mathbf{On}$ eine Menge.

$$\operatorname{drop}(\alpha,c) = \operatorname{drop}_c(\alpha) = \begin{cases} \sup(c \cap \alpha) & \text{falls } c \cap \alpha \neq \emptyset \\ \text{undefiniert} & \text{falls } c \cap \alpha = \emptyset \end{cases}$$

$$\operatorname{Drop}(X,c) = \{\operatorname{drop}(\alpha,c) : \alpha \in X\} = \operatorname{drop}_c'' X$$

Lemma 3.6 (Eigenschaften von drop und Drop)**.**

1. $\operatorname{drop}(\alpha,c)$ *ist undefiniert oder* $\leq \alpha$.
   $\operatorname{drop}(\alpha,c) = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{acc}(c)$

2. $\mathrm{drop}(\alpha, c) \in \mathrm{cl}(c)$, *falls* $\mathrm{drop}(\alpha, c)$ *definiert ist.*

3. $\mathrm{Drop}(X, c) \subseteq \mathrm{cl}(c)$

4. *Aus* $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *und „*$\mathrm{drop}(\alpha_1, c)$ *ist definiert" folgt:* $\mathrm{drop}(\alpha_2, c)$ *ist definiert und* $\mathrm{drop}(\alpha_1, c) \leq \mathrm{drop}(\alpha_2, c)$. *(Diese Regel stimmt für* $<$ *nicht)*

5. *Sei* $c \neq \emptyset$*, dann ist* $\alpha \mapsto \mathrm{drop}(\alpha, c)$ *ein Ordnungshomomorphismus auf einem Endsegment von* X.

6. *Aus* $c_1 \subseteq c_2$ *und „*$\mathrm{drop}(\alpha, c_1)$ *ist definiert" folgt:* $\mathrm{drop}(\alpha, c_2)$ *ist definiert und* $\mathrm{drop}(\alpha, c_1) \leq \mathrm{drop}(\alpha, c_2)$.

7. $c_i, i \in I$*, absteigend, d.h. f.a.* $i < j, i, j \in I$ $c_i \supseteq c_j$. *Dann ist für* α*, so dass beide definiert sind,* $\mathrm{drop}(\alpha, c_i) \geq \mathrm{drop}(\alpha, c_j)$.

8. *Sei* $|X| < \kappa$, $X \subseteq \mathbf{On}$, $\langle c_i : i < \kappa \rangle$ $\subseteq$*-absteigend und* κ *regulär. Dann gibt es ein* $i(X) < \kappa$*, so dass sich* $\langle \mathrm{Drop}(X, c_i) : i < \kappa \rangle$ *bei* $i(X)$ *stabilisiert.*

9. $\mathrm{acc}(\mathrm{Drop}(X, c)) = \mathrm{acc}(X) \cap \mathrm{acc}(c)$

Beweis des Lemmas 8.: Für jedes $\alpha \in X$ besteht $i(\alpha) := \{i : \mathrm{drop}(\alpha, c_i) > \mathrm{drop}(\alpha, c_{i+1})\}$ nur aus Ordinalzahlen einer absteigenden Folge und ist daher endlich. Aus der Regularität von κ und $|X| < \kappa$ folgt $i(X) := \sup\{i(\alpha) : \alpha \in X\} < \kappa$. Es gilt $i(X) \geq i(\alpha)$ für alle $\alpha \in X$, also stabilisiert sich $\langle \mathrm{Drop}(X, c_i) : i < \kappa \rangle$ bei $i(X)$. $\dashv$

Sei nun κ eine Kardinalzahl mit $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \aleph_1$.

Definition 3.7.

- $c \subseteq \kappa$ heißt club (in κ), wenn c abgeschlossen ($c \supseteq \mathrm{acc}(c)[\cap\kappa]$) und unbeschränkt ($\forall \alpha \in \kappa \exists \beta \in c\ \beta \geq \alpha$) in κ ist. Obermengen eines club heißen „im club-Filter liegend".
- $S \subseteq \kappa$ heißt stationär (in κ), wenn $\forall C$ (C club in $\kappa \rightarrow S \cap C \neq \emptyset$).
- $N \subseteq \kappa$ heißt nicht stationär, wenn $\exists C$ (C club $\wedge\ C \cap N = \emptyset$).

Anschaulich kann man sich vorstellen, dass hier der Reihe nach große (Obermenge von clubs), mittlere (stationäre, nicht im club-Filter liegende) und kleine Mengen definiert wurden.

Lemma 3.8 (Fodor, Pressing Down)**.** *Sei* $S \subseteq \kappa$*,* S *stationär in* κ *mit* $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \omega$. *Sei* $f : S \rightarrow \kappa$ *regressiv, d.h.* $\forall \alpha \in S\ f(\alpha) < \alpha$. *Dann gilt:*

$$\exists \gamma \in \kappa \exists S' \subseteq S, S' \text{ stationär } \forall \alpha \in S'.\ f(\alpha) = \gamma$$

(Jede regressive Funktion ist auf einer stationären Menge konstant.)

Lemma 3.9. *Seien* C_i*,* $i \in I$ *clubs in* κ *und sei* $|I| < \mathrm{cf}(\kappa)$. *Dann ist* $\bigcap_{i \in I} C_i$ *ein club.*

Bemerkung 3.10. *Dual hierzu folgt aus* N_i $(i \in I)$ *nicht stationär, dass* $\bigcup_{i \in I} N_i$ *nicht stationär ist.*

Definition 3.11. Sei $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \omega_1$ und $\langle \xi_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$, eine in κ konfinale Folge. Seien $\langle C_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$, clubs in κ. Dann ist ein Diagonalschnitt von $\langle C_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ definiert als

$$\Delta_{\bar{\xi}} C_i = \{\alpha \in \kappa : \alpha \in \bigcap_{\{i < \mathrm{cf}(\kappa) : \xi_i < \alpha\}} C_i\}$$

Im Standardfall $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ und $\xi_i = i$ ist

$$\Delta C_i = \{\alpha \in \kappa : \alpha \in \bigcap_{i < \alpha} C_i\}$$

Lemma 3.12. *Diagonalschnitte über* $\mathrm{cf}(\kappa)$ *(viele) clubs sind wieder (ein) club.*[1]

Beweis

- Unbeschränktheit: Sei $\gamma_0 \in \kappa$ gegeben, dann definiere induktiv:

$$\gamma_1 = \min \bigcap_{\{i < \mathrm{cf}(\kappa) : \xi_i < \gamma_0\}} C_i \setminus (\gamma_0 + 1)$$
$$\gamma_{n+1} = \min \bigcap_{\{i < \mathrm{cf}(\kappa) : \xi_i < \gamma_n\}} C_i \setminus (\gamma_n + 1)$$

  Die Schnitte sind nach Lemma 3.9 wieder clubs, weshalb die γ_n wohldefiniert sind. Die Folge der γ_n ist nach Definition echt aufsteigend. Auch gilt

$$\lim_{n \in \omega} \gamma_n \in \bigcap_{\{i < \mathrm{cf}(\kappa) : \xi_i < \lim \gamma_n\}} C_i$$

  und damit ist der Diagonalschnitt unbeschränkt.

- Abgeschlossenheit: Sei δ eine Limeszahl und $\langle \gamma_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ echt aufsteigend mit $\gamma_\alpha \in \Delta C_i$. Wir haben

$$\lim_{\alpha < \delta} \gamma_\alpha \in \bigcap_{\{i < \mathrm{cf}(\kappa) : \xi_i < \lim_{\alpha < \delta} \gamma_\alpha\}} C_i = \bigcap_{\alpha < \delta} \left(\bigcap_{\{i < \mathrm{cf}(\kappa) : \xi_i < \gamma_\alpha\}} C_i \right),$$

  also ist $\lim_{\alpha < \delta} \gamma_\alpha \in \Delta C_i$.

$\dashv$

Beweis des Lemmas von Fodor (3.8). Sei $f : S \to \kappa$ regressiv. Angenommen,

$$\begin{aligned} & \forall \gamma \in \kappa.\ \{\alpha \in S : f(\alpha) = \gamma\} \text{ nicht stationär} \\ \Rightarrow\ & \forall \gamma \in \kappa.\ \{\alpha \in S : f(\alpha) \neq \gamma\} \cup (\kappa \setminus S) \text{ ist Obermenge eines Clubs } C_\gamma. \end{aligned}$$

[1] Die Worte in Klammern haben keinen Einfluss auf den Inhalt des Lemmas, sie zeigen nur verschiedene Möglichkeiten auf, das Lemma in deutscher Sprache auszudrücken.

Es gilt

$$\{\alpha \in S : f(\alpha) \neq \gamma\} \stackrel{f \text{ regressiv}}{=} \{\alpha \in S : f(\alpha) < \alpha \wedge f(\alpha) \neq \gamma\}.$$

Nach Lemma 3.12 ist

$$\Delta_{\overline{\xi}} C_i = \{\alpha \in \kappa : \alpha \in \bigcap_{\{i < \mathrm{cf}(\kappa) : \xi_i < \alpha\}} C_i\}$$

ein club. Dann ist für alle $\alpha \in \Delta_{\overline{\xi}} C_i$ für alle $\gamma < \alpha \quad f(\alpha) \neq \gamma$. Damit ist f auf dem Club $\Delta_{\overline{\xi}} C_i$ nicht regressiv, im Widerspruch zur Voraussetzung „$\mathrm{dom}(f) = S$ ist stationär und f ist regressiv ". $\dashv$

Definition 3.13. Sei $S \subseteq \{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$ stationär in λ. Eine Folge $\langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ heißt *club guessing Folge* gdw $C_\delta \subseteq \delta$ ein club in δ vom Ordnungstyp κ ist, und

$$\forall C \subseteq \lambda\ (C \text{ club} \rightarrow \{\alpha \in S : C_\alpha \subseteq C \cap \alpha\} \text{ ist stationär}).$$

Satz 3.14. *Seien $\kappa < \lambda$ beide regulär, $\kappa^+ < \lambda$ und $S \subseteq \{\delta < \lambda : \mathrm{cf}(\delta) = \kappa\}$ stationär in λ. Dann gibt es eine club-guessing Folge $\overline{C} = \langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ für S.*

Bemerkung 3.15. *Die Existenz ist ohne die Forderung $\kappa^+ < \lambda$ nur konsistent mit* ZFC *und folgt nicht aus den Axiomen.*

Beweis Mit dem Auswahlaxiom nehmen wir zu jedem $\delta \in S$ ein $C_\delta^0 \subseteq \delta$ mit C_δ abgeschlossen in δ und $\mathrm{otp}(C_\delta^0) = \kappa$ bzw. $(C_\delta^0, \in) \cong (\kappa, \in)$. Setze $E_0 = \lambda$.

Induktiv über $i < \kappa^+$ wählen wir $\langle C_\delta^i : \delta \in S \cap \mathrm{acc}(E_i)\rangle$, so dass C_δ^i in δ ist und $\mathrm{otp}(C_\delta^i) = \kappa$ und E_i club in λ ist. Die Einschränkung des Definitionsbereichst auf S geschnitten mit einem club schadet der Aussage nicht, denn außerhalb des clubs können wir die Folgenglieder beliebig festlegen.

- Nachfolgerschritt $i \mapsto i+1$: Die Induktionsvoraussetzung für i ist:

  $$E_i \subseteq \lambda \text{ club}, \langle C_\delta^i : \delta \in S\rangle \text{ erfüllt } C_\delta^i \text{ club in } \delta \text{ und } \mathrm{otp}(C_\delta^i) = \kappa.$$

  - 1. Fall: $(\forall C \subseteq \lambda)(C \text{ club} \rightarrow \{\alpha \in S : C_\alpha^i \subseteq C \cap \alpha\}$ ist stationär). Dann ist der Beweis fertig: $\langle C_\alpha^i : \alpha \in S\rangle$ ist eine glub-guessing Folge.
  - 2. Fall: Es gibt einen Club E', so dass $\{\delta \in S : C_\delta^i \subseteq E'[\cap\delta]\}$ nicht stationär ist. Setze $E_{i+1} = E' \cap E_i$, das heißt $\{\delta \in S : C_\delta^i \subseteq E' \wedge C_\delta^i \text{ club in } \delta\}$ ist nicht stationär.
    Wir setzen for $\delta \in S \cap \mathrm{acc}(E_{i+1})$, $C_\delta^{i+1} = \mathrm{Drop}(C_\delta^i, E_{i+1}) = \{\underbrace{\mathrm{drop}(\alpha, E_{i+1})}_{\sup(\alpha \cap E_{\alpha+1})} : \alpha \in C_\delta^i\}$. Dieses ist ein club in δ.

- Limesschritt i: Sei $i < \kappa^+ < \lambda$. $\bigcap_{j<i} E_j = E_i$ ist ein club in λ. Wir nehmen für $\mathrm{cf}(i) = \kappa$ C_δ^i als Diagonalschnitt frẗherer C_δ^j, d.h. wir fixieren

eine aufsteigende konfinale Folge j_α, $\alpha < \kappa$, in i und eine aufsteigende Folge δ_α, $\alpha < \kappa$, in δ und setzen

$$C^i_\delta = \{\beta \in \delta : (\forall \alpha < \kappa)(\beta < \delta_\alpha \to \beta \in C^{j_\alpha}_\delta\}.$$

Für $\mathrm{cf}(i) < \kappa$, nehmen wir als C^i_δ den Schnitt der früheren C^j_δ.

Behauptung. *Die Induktion bricht bei einem $i_0 < \kappa^+$ ab.*

Sonst setzen wir $E := \bigcap_{i<\kappa^+} E_i$, welches ein club in λ ist. Alle C^i_δ haben die Mächtigkeit κ. Daher hat C^i_δ, $i < \kappa^+$ eine Stabilisierung $s(\delta) < \kappa^+$, es gilt also $\mathrm{Drop}(C^{s(\delta)}_\delta, E_{s(\delta)}) = \mathrm{Drop}(C^{s(\delta)+1}_\delta, E_{s(\delta)})$. Seien $\beta < \kappa^+$ und $S' \subseteq S \cap E$ so, dass für $\varepsilon \in S'$, $s(\varepsilon) < \beta$. Nach Definition ist $C^{\beta'}_\delta \not\subseteq E_\beta$ für ein $\beta' \in S \setminus \beta$, da die Induktion bei β nicht abbricht. Damit ist auch $C^{s(\beta}_\delta \not\subseteq E$. Es gilt

$$C^{\beta'+1}_\delta \subseteq \mathrm{cl}\, E_\beta = E_\beta$$

und daher $\mathrm{drop}(C^{\beta'+1}_\delta, E_\beta) \neq \mathrm{drop}(C^{\beta'}_\delta, E_\beta)$ und $\beta' \geq \beta > s(\beta')$ ein Widerspruch. $\dashv$

Aus dem Beweis folgt das folgende Korollar.

Korollar 3.16. *Seien $\kappa^+ < \lambda$, $S \subseteq \{\delta < \lambda : \mathrm{cf}(\delta) = \kappa\}$ stationär, dann gibt es für alle $\langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ mit C_δ club in δ und $\mathrm{otp}(C_\delta) = \kappa$ und für alle clubs E' einen club $E \subseteq E'$, so dass*

$$\langle \mathrm{drop}(C_\delta, E) : \delta \in S \cap \mathrm{acc}(E')\rangle$$

eine club guessing Folge für $S \cap \mathrm{acc}(E')$ ist.

3.1 Übungen

Übung 3.1. Wie sehen Clubs in ω aus? Gibt es zwei disjunkte Clubs?

Übung 3.2. Sei C eine club Menge in κ, $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \aleph_1$. Ist dann $A(C) := acc(C) \cap C = \{\alpha \in C : \sup(C \cap \alpha) = \alpha\}$ club? Ist $A(C) = C$ möglich? Dies geht schon zur Übung 3.12 über: Wie oft kann man die Bildung $C \mapsto acc(C) \cap C$ iterieren (mit Durchschnitten in den Limesschritten), bis zur Stabilisierung $A^{(\alpha)}(C) = A^{(\alpha+1)}(C)$? Wie sieht die stabile Menge aus?

Übung 3.3. Denken Sie an Beispiele:

- $\aleph_{\alpha+\omega_1}$ ist eine singuläre Kardinalzahl von überabzählbarer Konfinalität.
- Endsegmente sind sehr einfache club-Mengen.
- Was passiert mit der Konfinalität bei stetigen, wachsenden Funktionen $f : A \to B, A, B \subseteq \mathbf{On}$ Mengen? Können Sie einen Zusammenhang zwischen $\mathrm{cf}(\alpha)$ und $\mathrm{cf}(f(\alpha))$ finden?

- Eine „verrückte“ Halbordnung: Sei $(P, \leq_P)$ die Menge $\omega \times \omega$ mit der komponentenweisen Ordnung. Malen Sie diese als Quadrat. Wie sehen die konfinalen Teilmengen aus? Ist $\mathrm{tcf}(P)$ definiert?

Übung 3.4. Wir betrachten κ mit $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \aleph_1$. Geben Sie eine möglichst kleine Familie $\{C_i : i \in I\}$ an, so dass

a) alle C_i club in κ sind,

b) und $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$.

Eine Familie heißt möglichst klein, wenn $|I|$ möglichst klein ist. Können Sie zeigen, welches die optimale Größe von $|I|$ ist?

Übung 3.5. Gibt es auch in ω_1 eine stationäre nicht club Menge? Kann man eine angeben? Dies müssen Sie nicht selbst konstruieren, es ist nämlich nicht ganz kurz. Die Konstruktion heißt Satz von Solovay und braucht AC. Schauen Sie unter Theorem 7.19.

Übung 3.6. Gegeben μ, κ_0, gibt es $\kappa \geq \kappa_0$, so dass $\forall \alpha < \kappa, \alpha^\mu < \kappa$?

Übung 3.7. Sind Nachfolgerkardinalzahlen regulär?

Übung 3.8. (*) Gibt es reguläre Limeskardinalzahlen? Vorsicht: Denken Sie daran, dass ZFC nicht alles beantwortet. Vielleicht können Sie sich aus einer anderen Vorlesung oder Quelle an $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ erinnern und dies als Testfall heranziehen.

Übung 3.9. Gibt es $\{(\alpha, r_\alpha) : \alpha \in \aleph_1\}$, so dass

a) für $\alpha \in \aleph_1$, $r_\alpha \in \mathbb{R}$,

b) und die r_α paarweise verschieden sind?

Versuchen Sie eine Antwort in ZFC.

Dies ist wieder eine Sternchenfrage: Geht es auch in ZF? Wie ist es, wenn man nur (a) oder nur (b) fordert? Geht es dann in ZF?

Übung 3.10. (a) Gibt es beliebig große singuläre Kardinalzahlen? (Technisch: Gegeben κ, gibt es $\lambda \geq \kappa$, so dass λ singulär ist?)

(b) Gibt es beliebig große Kardinalzahlen mit Konfinalität ω?

Übung 3.11. Sei κ_0 eine beliebige unendliche Kardinalzahl. Gibt es $\kappa \geq \kappa_0$, so dass $\aleph_\kappa = \kappa$?
Hinweis: Probieren Sie eine Iteration:

- κ_0 ist wie oben.
- Für $n \in \omega$ sei $\kappa_{n+1} := \aleph_{\kappa_n}$, falls $\aleph_{\kappa_n} > \kappa_n$. Falls dies nicht der Fall ist, brechen wir ab und sind fertig.
- Falls alle κ_n definiert sind, setzen wir $\kappa_\omega := \sup \kappa_n$. Ist dann κ_ω ein Fixpunkt? Woran liegt das?

Überlegen Sie sich, welche der Ihnen bekannten Operationen von $F\colon \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ stetig sind und welche nicht. F heißt stetig, wenn für alle Limites λ, $F(\lambda) = \sup\{F(\alpha) \ : \ \alpha < \lambda\}$.

Übung 3.12. Gegeben eine Menge X, definieren wir für $\theta \in \mathbf{On}$ eine Art Cantor-Bendixson-Ableitung $A^{(\theta)}(X)$ wie folgt:

a) $A^{(0)}(X) := X$.

b) $A^{(1)}(X) = A(X) := \mathrm{acc}(X) \cap X$.

c) $A^{(\theta+1)}(X) := A(A^{(\theta)}(X)$.

d) $A^{(\lambda)}(X) := \bigcap_{\theta<\lambda}(A^{(\theta)}(X))$ für λ Limeszahl.

Finden Sie ein Ordinalzahl α, so dass $A^{(5)}(\alpha) = \emptyset$ aber $A^{(i)}(\alpha) \neq \emptyset$ für $i = 0, 1, \ldots, 4$.
(Erinnerung: Falls $\alpha \in \mathbf{On}$, ist $\alpha = \{\xi \in \mathbf{On} : \xi < \alpha\}$)

Übung 3.13. Sei $C_i := \{\aleph_2 + j : j < i\}$ für $i \in \mathbf{On}$. Gibt es ein Menge $X \subseteq \mathbf{On}$ so dass $\mathrm{drop}(X, C_i)$ für möglichst viele i verschieden ist? Dieses „möglichst viele” hängt von X ab.

Kapitel 4

pcf(a) und das Ideal $J_{<\lambda}(a)$

In diesem Kapitel ist a eine Menge regulärer Kardinalzahlen.

Definition 4.1.

$$\left(\prod a, <_I\right) := \left(\prod_{\alpha\in a} \alpha, <_I\right)$$

Definition 4.2.

$$\begin{aligned}\operatorname{pcf}(a) &= \left\{\operatorname{tcf}\left(\prod_{\alpha\in a} \alpha/I, <_I\right) : I \text{ Ideal auf } a\right\} \\ &= \left\{\operatorname{tcf}\left(\prod_{\alpha\in a} \alpha/U, <_U\right) : U \text{ Ultrafilter über } a\right\}\end{aligned}$$

Definition 4.3. a heißt progressiv, wenn $|a| < \min(a)$.

Definition 4.4. a heißt stark progressiv, wenn $|a|^+ < \min(a)$.

Falls a progressiv ist, kann man für die meisten Überlegungen zu dem stark progressiven $a' = a \setminus \{\min(a)\}$ übergehen. Viele Funktionswerte für uns interessierende Funktionen sind für a und a' identisch. Daher ist die Annahme, dass a stark progressiv ist, meistens keine weitere Einschränkung, wenn man schon die Progressivität von a angenommen hat. Die Annahme der Progressivität ist für viele Rechenschritte wesentlich.

Definition 4.5. $b \subseteq a$ *erzwingt Kofinalität* $< \lambda$, wenn

$$\text{für alle Ultrafilter } D \text{ auf } a \text{ gilt: } b \in D \to \operatorname{cf}\left(\prod a_{/D}\right) < \lambda.$$

Definition 4.6. $J_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : b \text{ erzwingt Konfinalität } < \lambda\}$.

Bemerkung 4.7. *$J_{<\lambda}(a)$ ist ein Ideal über a.*

Beweis

- Sei $b \in J_{<\lambda}(a)$ und $c \subseteq b$, dann ist $c \in J_{<\lambda}(a)$.

- Seien nun $b_1, b_2 \in J_{<\lambda}(a)$, dann ist zu zeigen, dass $b_1 \cup b_2 \in J_{<\lambda}(a)$. Sei D ein Ultrafilter auf a und sei $b_1 \cup b_2 \in D$, dann gilt, da D ein Ultrafilter ist, $b_1 \in D$ oder $b_2 \in D$. Da $b_1, b_2 \in J_{<\lambda}(a)$, ist $\mathrm{cf}(\prod a_{/D}) < \lambda$.

$\dashv$

Satz 4.8. $\prod a_{/J_{<\lambda}(a)}$ *ist* $<\lambda$*-gerichtet, also*

$$\forall B \subseteq \prod a_{/J_{<\lambda}(a)}. \ (|B| < \lambda \to B \textit{ hat eine } <_{J_{<\lambda}(a)}\textit{-obere Schranke})$$

Beweis Induktion über $|B|$:

- 1. Fall: $|B| \leq |a|^+ < \min(a)$. Für $\alpha \in a$ definieren wir $f(\alpha) = \sup\{g(\alpha) : g \in B\}$.[1] Für alle $g \in B$ gilt daher $g \leq f$.
- Nachfolgerschritt: Es gelte $|a|^+ < |B| = \mu < \lambda$, wobei $\mu = \nu^+$. Wir nehmen B_α, $\alpha < \mu$, so dass $|B_\alpha| < \mu$ und $B = \bigcup_{\alpha<\mu} B_\alpha$. Wir wählen eine $<_{J_{<\lambda}(a)}$-aufsteigende Folge wie folgt:
  - g_0 als obere Schranke von B_0
  - g_α als obere Schranke von $B_\alpha \cup \{g_\beta : \beta < \alpha\}$.

  Nach der Induktionsvoraussetzung hat $B_\alpha \cup \{g_\beta : \beta < \alpha\}$ jeweils eine obere Schranke, da $|B_\alpha| + |\{g_\beta : \beta < \alpha\}| < \mu$. Nun wird eine Hilfsfolge $h_\beta, \beta < |a|^+$ definiert:

  Induktionsanfang: $h_0 = g_0$ bzw. $h_0 \in [g_0]_J$

  Limesschritt: Sei δ eine Limeszahl, und seien h_δ für $\gamma < \delta$ schon definiert. $h_\delta(\alpha) = \sup\{h_\gamma(\alpha) : \gamma < \delta\}$ für $\delta < |a|^+$

  Nachfolgerschritt $\delta \to \delta + 1$: Falls h_δ eine obere Schranke für $\langle g_\beta : \beta < \mu\rangle$ ist, so ist der Beweis schon fertig. Wir brechen dann die (innere) Induktion ab und behalten das gut h_δ.

  Wir nehmen also an, dass h_δ keine obere Schranke von $\langle g_\beta : \beta < \mu\rangle$ ist. Dann gibt es ein $i_\delta < \mu$, so dass $g_{i_\delta} \not\leq_{J_{<\lambda}(a)} [h_\delta]_{J_{<\lambda}(a)}$. Setze $b^\delta_{i_\delta} := \{\gamma : g_{i_\delta}(\gamma) > h_\delta(\gamma)\} \notin J_{<\lambda}(a)$. Ohne Einschränkung ist i_δ minimal. Auch jedes große α hat diese Eigenschaft: $\forall \alpha \geq i_\delta \ (g_\alpha \not\leq_{J_{<\lambda}(a)} [h_\delta]_{J_{<\lambda}(a)} \wedge b^\delta_\alpha \notin J_{<\lambda}(a))$. Da $b^\delta_{i_\delta}$ nicht Konfinalität $<\lambda$ erzwingt, gibt es einen Ultrafilter D auf a, so dass $b^\delta_{i_\delta} \in D$ und $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Daher gibt es ein $[f]_D$, so dass für alle $\alpha < \mu$ $[f]_D \geq_D [g_\alpha]_D$ gilt. Definiere nun $h_{\delta+1}(\alpha) = \max(h_\delta(\alpha), f(\alpha))$ punktweise, somit ist $h_{\delta+1}(\alpha) \geq h_\delta(\alpha)$.

  Für alle $\alpha < \mu$ ist $b^{\delta+1}_\alpha \notin D$, da $\{\gamma \in a : h_{\delta+1}(\gamma) < g(\gamma)\} \notin D$, da $h_{\delta+1} \geq_D g_\alpha$ für jedes g_α. Für $\alpha \geq i_\delta$ ist $b^\delta_\alpha \in D$.

  Nach dem Schubfachprinzip mit $|a|^+ < \mu$ und $|a|$-vielen i_δ, gibt es ein $\alpha_{\sup}$, so dass

$$(\forall \delta \in |a|^+)(i_\delta \leq \alpha_{\sup} < \mu).$$

[1] Der Ausdruck „$g \in B$“ steht für „$[g]_J \in B$“, allerdings werden aus Gründen der Übersichtlichkeit hier und im Folgenden die Klammern weggelassen.

Falls die innere Induktion nie (bei einem Nachfolgerschritt) stoppt, haben wir also $\langle b^{\delta}_{\alpha_{\text{sup}}} : \delta < |a|^+ \rangle$, eine streng absteigende Folge von Teilmengen von a. Dies ist ein Widerspruch, und daher hört die innere Induktion an einer Stelle im Nachfolgerschritt auf. Wir haben also den Nachfolgerschritt der äußeren Induktion beendet.

- Limesschritt: Ist $|B|$ regulär, so lässt sich der Limesschritt wie der Nachfolgerschritt beweisen, da im Nachfolgerschritt nur benutzt wurde, dass $|B|$ regulär ist. Daher sei ohne Einschränkung $|B|$ singulär, es gilt also $\text{cf}(B) < |B| < \lambda$ und es existieren B_i mit

$$|B| = \bigcup_{i < \text{cf}(|B|)} B_i \text{ und } |B_i| < |B|.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung hat für jedes $i < \text{cf}(|B|)$ $\;B_i$ eine obere Schranke $f_{i/D} \in \prod a/D$. Da $\text{cf}(|B|) < |B|$ liefert die Induktionsvoraussetzung angewandt auf $\{f_i/D : i < \text{cf}(|B|)\}$ eine obere Schreanke zu dieser Menge. Da $\leq_D$ transitiv ist, ist diese obere Schranke eine obere Schranke für ganz B.

$\dashv$

Korollar 4.9. *Wenn* $\text{cf}\,(\prod a/D) < \lambda$*, dann gibt es ein* $b \in D$*, so dass* b *Konfinalität* $<\lambda$ *erzwingt.*

Beweis Angenommen, es gibt kein $b \in D$, so dass b Konfinalität $<\lambda$ erzwingt. Dann gilt $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$.

Die Voraussetzung des Korollars liefert ein $\mu < \lambda$ mit $\text{cf}\,(\prod a/D) = \mu < \lambda$. Sei also $\langle g_\alpha/D : \alpha < \mu \rangle$ konfinal in $\prod a/D$. Da $\leq_{J_{<\lambda}(a)}$ $<\lambda$-gerichtet ist, gibt es ein g, so dass $(\forall \alpha < \mu)(g_\alpha \leq_{J_{<\lambda}(a)} g)$. Dann ist auch für alle $\alpha < \mu$, $g \geq_D g_\alpha$, da $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$. Dann widerspricht $g \geq_D g_\alpha$ $(\alpha < \mu)$ der Tatsache, dass $\langle g_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ konfinal in $\prod a/D$ ist. $\dashv$

Korollar 4.10. *Für alle Ultrafilter* D *auf* a *gilt*

$$\text{cf}\left(\prod a/D\right) < \lambda \Leftrightarrow D \cap J_{<\lambda}(a) \neq \emptyset.$$

Beweis Die Vorwärtsrichtung wurde eben gezeigt, die Rückrichtung folgt aus Definition 4.5 (erzwingen). $\dashv$

Bemerkung 4.11. *Eigenschaften von* $J_{<\lambda}(a)$*:*

1) $\mu \leq \lambda \Rightarrow J_{<\mu}(a) \subseteq J_{<\lambda}(a)$

2) Sei λ *eine Limeskardinalzahl, dann gilt*

$$J_{<\lambda}(a) = \bigcup_{\mu < \lambda} J_{<\mu}(a).$$

(Zusätzlich kann μ *regulär gefordert werden.)*

Lemma 4.12. $\lambda \in \mathrm{pcf}(a) \Leftrightarrow J_{<\lambda}(a) \subsetneq J_{<\lambda^+}(a)$

Beweis

„$\Leftarrow$“: Sei $b \in J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a)$. Nun nehme man D, so dass $b \in D$ und $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$, dann gilt $\mathrm{cf}\left(\prod a/D\right) = \lambda$, wobei $< \lambda^+$ aus der Wahl von b folgt und $\geq \lambda$ aus Korollar 4.10.

„$\Rightarrow$“: Aus $\lambda = \mathrm{cf}\left(\prod a/D\right) < \lambda^+$ folgt die Existenz eines $b \in J_{<\lambda^+}(a) \cap D$ aus dem vorigen Korollar. Es gilt $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$, daher ist $\emptyset \neq J_{<\lambda^+}(a) \cap D = (J_{<\lambda^+}(a) \cap D) \setminus (J_{<\lambda}(a) \cap D) \subseteq J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a)$.

$\dashv$

Korollar 4.13. $|\,\mathrm{pcf}(a)| \leq 2^{|a|}$.

Beweis pcf(a) kann injektiv in die Differenzenmengen der aufsteigenden Folge $\langle J_{<\lambda^+}(a) : \lambda \in \mathrm{pcf}(a)\rangle$ abgebildet werden. Es gilt $J_{<\lambda^+}(a) \in \mathscr{P}(a)$ und $|\mathscr{P}(a)| \leq 2^{|a|}$. Jede Wohlordnung von $2^{|a|}$ hat die Länge $< \left(2^{|a|}\right)^+$, also auch die Wohlordnung $\langle J_{<\lambda^+}(a) : \lambda \in \mathrm{pcf}(a)\rangle$. $\dashv$

Bemerkung 4.14. *Nach diesem Zählargument ist $a \in J_{<\lambda}(a)$ für ein genügend großes λ, zum Beispiel für $\lambda \in \mathrm{Card} \setminus (\max(\mathrm{pcf}(a)) + 1)$.*

Bemerkung 4.15. *Wir werden später Erzeugende $b_\lambda \subseteq a$ von $J_{<\lambda^+}(a)$ einführen. Falls $\{b_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(a)\}$ eine disjunkte Verfeinerung (disjoint refinement) hat, so ist $|\,\mathrm{pcf}(a)| = |a|$. Sei $X \subseteq \mathscr{P}(A)$. Dann heißt $Y \subseteq \mathscr{P}(A)$* disjunkte Verfeinerung von X, falls es eine Bijektion $f\colon X \to Y$ gibt, so dass für $x \in X$, $\emptyset \neq f(x) \subseteq x$ und für $x \neq x'$, $f(x) \cap f(x') = \emptyset$. Die Gleichung $|\,\mathrm{pcf}(a)| = |a|$ heißt die *pcf-Vermutung. Sie ist seit 1989 offen.*[2]

Bemerkung 4.16. $\min\{\lambda : a \in J_{<\lambda}(a)\}$ *ist eine Nachfolgerkardinalzahl κ^+, denn für eine Limeszahl γ gilt $J_{<\gamma}(a) = \bigcup_{\mu<\gamma} J_{<\mu}(a)$. Daher gibt es ein D auf a mit $\prod a/D = \kappa$.*

Lemma 4.17. *Wenn* $\min(a) > |\,\mathrm{pcf}(a)|$, *dann ist* $\mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(a)) = \mathrm{pcf}(a)$

Beweis: Für den Beweis verwendet man einen Limes von Ultrafiltern, auch bekannt als Ruden-Frolík-Summen. $\dashv$

Definition 4.18. Sei $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$ eine $<_I$-aufsteigende Folge.

- f heißt obere Schranke, wenn $\forall\alpha\ f_\alpha \leq_I f$.
- f heißt kleinste obere Schranke (lub[3]), wenn $(\forall\alpha)(f_\alpha \leq_I f \wedge (\forall g)(\forall\alpha f_\alpha \leq_I g \to f \leq_I g))$.

[2]Sommer 2013: Moti Gitik hat Gegenbeispiele, aber nur für den Fall, dass a kein Intervall ist.

[3]least upper bound

- f heißt minimale obere Schranke, wenn $\forall\alpha\ f_\alpha \leq_I f \wedge \forall g\ (\forall\alpha\ f_\alpha \leq_I g \rightarrow g \not<_I f)$.

Bemerkung 4.19. *Die Definition einer* minimalen *oberen Schranke wird nur für die Vollständigkeit geführt, da im Folgenden gilt, dass f genau dann eine minimale obere Schranke ist, wenn f eine kleinste obere Schranke ist.*

Beweis: Wenn in einer Halbordnung $(H, <_H)$ je zwei Elemente ein Minimum haben, so ist jede minimale obere Schranke einer Teilmenge F der Halbordnung auch kleinste obere Schlanke eben dieser Teilmenge. $\min(f, f')$ ist das Minimum von f und f', falls es $\leq f$ und $\leq f'$ ist und falls für jedes $g \leq_H f$, $g \leq_H f'$ gilt: $g \leq_H \min(f, f')$. Sei f minimale obere Schranke von F. $\leq_H = \leq_I$ hat Minima. Annahme f ist nicht die kleinste obere Schranke. Dann gibt es eine weitere obere Schranke von F, so dass $f \not\leq_H f'$. Dann ist $\min(f, f') <_H f$, und außerdem gilt für jedes $g \in F$, $g \leq_H \min(f, f')$.

Lemma 4.20 (Ein Teil der Shelah-Trichotomie)**.** *Sei D ein Ultrafilter auf κ, $\lambda > \kappa^+$ und $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ echt aufsteigend in $\mathbf{On}^\kappa/D$. Dann gilt entweder*

a) *$\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ hat eine kleinste obere Schranke in $\mathbf{On}^\kappa/D$ oder*

b) *Es gibt S_α mit $|S_\alpha| \leq \kappa$ für $\alpha < \kappa$ und $S_\alpha \subseteq \mathbf{On}$, so dass gilt:*

$$\mathscr{A} := \prod_{\alpha\in\kappa} S_\alpha/D \text{ schneidet } \langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle \text{ konfinal,}$$

d.h. $\forall\alpha < \lambda \exists h \in \mathscr{A} \exists\beta < \lambda\ \ (f_\alpha/D < h/D < f_\beta/D)$ und $\mathrm{cf}(\mathscr{A}) \geq \lambda$.

Bemerkung 4.21. *Das Lemma ist auch richtig, wenn D nur ein Filter auf κ ist. Diese stärkere Variante hat einen deutlich längeren Beweis und wird für die Vorlesung nicht benötigt.*

Beweis Induktiv wird über $\beta < \kappa^+$ eine Folge h_β, $\beta < \kappa^+$, konstruiert, so dass für alle $\beta < \kappa^+$ die Funktion h_β eine obere Schranke von $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ ist.

- Induktionsanfang: Für $\gamma \in \lambda$ sei f_γ ein Repräsentant von f_γ/D. Dann setzen wir für $\beta \in a$, $h_0(\beta) = \sup\{f_\gamma(\beta) + 1 : \gamma < \lambda\}$.

- Nachfolgerschritt: Sei h_β schon definiert und eine obere Schranke in $\leq_D$ von $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$. Ist h_β eine kleinste obere Schranke, so ist der Beweis schon fertig. Andernfalls existiert ein $h <_D h_\beta$, so dass h eine obere Schranke von $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ ist, dann setze $h_{\beta+1} := h$.

- Limesschritt: Sei $\beta < \kappa^+$, β eine Limeszahl und seien h_γ für alle $\gamma < \beta$ schon gewählt. Es gilt $h_{\gamma'}/D <_D h_\gamma/D$ für $\gamma < \gamma' < \beta$. Für $\delta \in \kappa$ setze $S^\beta_\delta := \{h_\gamma(\delta) : \gamma < \beta\}$. Dann gilt $|S^\beta_\delta| \leq \kappa$. Für $\alpha < \lambda$ und $\delta \in \kappa$ setze

  $$g_\alpha(\delta) := g^\beta_\alpha(\delta) := \min\left(S^\beta_\delta \setminus (f_\alpha(\delta) + 1)\right) > f_\alpha(\delta)$$

  Es gilt $\forall\alpha < \lambda, \gamma < \beta.\ g_\alpha/D \leq h_\gamma/D$. Auch gilt für alle $\alpha \leq \alpha' < \lambda$ $g_\alpha/D \leq g_{\alpha'}/D$. Nun sind zwei Fälle zu betrachten:

– Ist g_α, $\alpha < \lambda$ schließlich konstant, dann gibt es ein $\alpha_0 < \lambda$ so dass für alle $\alpha, \alpha' \geq \alpha_0$ $g_\alpha/D = g_{\alpha'}/D$ gilt. h_β/D wird nun als g_{α_0}/D definiert. Dann gilt $h_\beta/D \leq_D h_{\gamma+1}/D < h_\gamma/D$ und $h_\beta/D = g_\alpha/D \geq f_\alpha/D$, also ist h_β/D eine obere Schranke für ein alle $\alpha < \lambda$, da f_α/D aufsteigend ist.

– Ist g_α/D nicht schließlich konstant, dann gilt: $\langle g_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ bezeugt, dass $\prod_{\delta\in a} S_\delta/D$ die Folge $\overline{f}$ konfinal schneidet, also gibt es ein $\alpha' < \alpha$ mit $g_\alpha/D \lneq_D f_{\alpha'}/D \lneq_D g_{\alpha'}/D \lneq f_{\alpha''}/D$.

Behauptung. *Die induktive Definition der h_β stoppt bei einem $\beta < \kappa^+$ im Nachfolgerschritt oder im Limesschritt.*

Beweis Angenommen, wir haben h_β, $\beta < \kappa^+$ und $\overline{S}_\delta = \{h_\gamma(\delta) : \gamma < \kappa^+\}$. Setze $\overline{g}_\alpha(\delta) = \min(\overline{S_\delta} \setminus (f_\alpha(\delta) + 1))$, dann gibt es nach dem Schubfachprinzip für jedes $\alpha < \lambda$ ein $\beta(\alpha) < \kappa^+$ so dass $\forall\delta \in \kappa\exists\beta' < \beta(\alpha)$. $\overline{g}_\alpha(\delta) = h_{\beta'}(\delta)$. Nochmalige Anwendung des Schubfachprinzips auf die Färbung $\tilde{\beta} : \lambda \to \kappa^+$, $\alpha \mapsto \tilde{\beta}(\alpha)$ liefert die Existenz von $\beta < \kappa^+$ und $H \subseteq \lambda$, wobei H konfinal in λ ist und für alle $\alpha \in H$ $\tilde{\beta}(a) = \beta$ gilt. Wurde die induktive Definition von h_β, $h_{\beta+1}$ weiter geführt, so braucht $\overline{g}_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ nur einen Wertebereich bis $\beta(\alpha)$. Dann ist der Stabilisierungswert von $\langle g^\beta_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle = h_\beta/D = \overline{g}_\alpha/D$. eine obere Schranke, und im Gegensatz zu unserer Annahme nicht die Induktion ab. $\dashv$

Damit ist der Satz bewiesen. $\dashv$

4.1 Übungen

Übung 4.1. Ist $\mathrm{pcf}(a \cup b) = \mathrm{pcf}(a) \cup \mathrm{pcf}(b)$?

Übung 4.2. Gilt $a \subseteq b \implies \mathrm{pcf}(a) \subseteq \mathrm{pcf}(b)$?

Übung 4.3. Zeigen Sie: $\{\mathrm{tcf}(\prod a/I) : I \text{ Ideal auf } a\} =$
$\{\mathrm{cf}(\prod a/I) : I \text{ maximales Ideal auf } a\}$.

Übung 4.4. Seien κ, λ wie im Satz über die Existenz einer club guessing Folge, und zusätzlich sei nun $\kappa \geq \aleph_1$. Zeigen Sie: Für c^α_δ können wir $\mathrm{acc}(c^0_\delta \cap E_\alpha)$ nehmen und den Beweis hiermit durchführen.

Übung 4.5. Das „oder“ in Lemma 4.20 („ein Teil der Shelah Trichotomie“), ist kein ausschließliches oder. Wir betrachten ein Beispiel:

Definiere $A := \{\aleph_k : k \in \omega \setminus \{\emptyset\}\}$. Für $\aleph_k \in A$ ist $S_{\aleph_k} := \{\aleph_{\omega\cdot k+i} : i \in \omega\}$. Dann nehmen wir $f_n \in \prod_{k\in\omega\setminus\{\emptyset\}} /I$ mit $I := \{\emptyset\}$ wie folgt:

$$f_n(\aleph_k) := \aleph_{\omega\cdot k+k+n}$$

a) Hat $\langle f_n/I : n \in \omega\rangle$ eine kleinste obere Schranke in $(\mathbf{On}^\omega, <_I)$?

b) Wie sieht es für maximale Ideale auf A aus?

Übung 4.6. Eine lub f/I von $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$ ist eine eub (genau obere Schranke) genau dann, wenn
$\forall g(g/I <_I f/I \implies \exists\alpha \in \lambda(g/I \leq_I f_\alpha/I))$

a) Sei g/I eub von $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$, und $J \supseteq I$. Ist g/J eub von $\langle f_\alpha/J : \alpha < \lambda\rangle$?

b) Falls D ein Ultrafilter ist, g/D lub von $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle \implies g/D$ eub.

c) Hat die Folge $\langle f_n/I : n \in \omega\rangle$ von Übung 4.5 eine eub in $\mathbf{On}^\omega/I$?

Übung 4.7. Sei $I = \{a \subseteq \omega : a \text{ endlich}\}$. Wir betrachten eine Folge $\langle f_n/I : n \in \omega\rangle$, so dass $f_n/I \in \omega^\omega/I$, und $f_n/I <_I f_{n+1}/I$.

a) Gibt es eine obere Schranke?

b) Geben Sie ein Beispiel an, das eine obere Schranke aber keine kleinste obere Schranke (lub) hat.

($\star$) Geben Sie ein möglichtest schwaches hinreichendes Kriterium dafür, dass $\langle f_n/I : n \in \omega\rangle$ keine kleinste obere Schranke hat.
Ist das von Ihnen gegeben Kriterium auch notwendig?

Kapitel 5

Der Intervallsatz

Definition 5.1. Der Limes über einen Filter ist wie folgt definiert:

$$\lim_D(a) := \min\{\mu' : \forall\beta < \mu'(\beta \in \mathbf{On} \to \{\alpha \in a : \beta < \alpha \le \mu'\} \in D)\}$$

Satz 5.2. *Intervallsatz. Seien $\lambda = \mathrm{cf}\,(\prod a/D)$ und $\mu = \lim_D(a)$. Dann gibt es für jedes reguläre λ' mit $\mu < \lambda' < \lambda$ ein a' mit $|a'| \le |a|$ und einen Ultrafilter D' auf a', so dass gilt:*

$$\lim_{D'} a' = \mu \text{ und } \mathrm{cf}\left(\prod a'/D'\right) = \lambda'$$

Beispiel 5.3. *Sei D ein Hauptultrafilter. Also gibt es ein $\alpha \in A$ mit $D = \{b \subseteq a : \alpha \in b\}$. Dann sind $\mu = \lim_D(a) = \alpha$ und $\lambda = \mathrm{cf}\,(\prod a/D) = \alpha$.*

Notation 5.4. *Für zwei Kardinalzahlen μ und λ steht $(\mu, \lambda)_{\mathrm{reg}}$ für das Intervall zwischen μ und λ, das nur reguläre Kardinalzahlen enthält.*

Korollar 5.5. *Ist $a = (\beta, \mu)_{\mathrm{reg}}$ und $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$, dann gibt es zu jedem $\lambda' \in (\mu, \lambda)_{\mathrm{reg}}$ einen Ultrafilter D' auf a, so dass $\mathrm{cf}\,(\prod a/D') = \lambda'$.*

Beweis des Satzes 5.2:

Wir nehmen eine Folge $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$, die konfinal in $\prod a/D$ liegt, wobei $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ echt aufsteigend ist.
$\langle \mathscr{C}_\alpha : \alpha < \lambda'\rangle$ heißt silly square, wenn für alle $\alpha < \lambda'$ gilt:

- $\mathscr{C}_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$
- $|\mathscr{C}_\alpha| \le \lambda'$
- $\exists E_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha.\ (E_\alpha \text{ club in } \alpha \wedge \mathrm{otp}(E_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha))$
- $\forall\beta < \alpha \forall E \in \mathscr{C}_\alpha.\ E \cap \beta \in \mathscr{C}_\beta$

Behauptung 1. *Es gibt eine silly square Folge $\langle \mathscr{C}_\alpha : \alpha < \lambda'\rangle$*

Beweis: Sei für $\beta < \lambda'$, β Limeszahl, $E_\beta \subseteq \beta$ club und $\mathrm{otp}(E_\beta) = \mathrm{cf}(\beta)$ $\mathscr{C}_\beta = \{E_\gamma \cap \beta : \gamma < \lambda'\}$. $\dashv$

Wir definieren nun $\langle \tilde{f}_\alpha : \alpha < \lambda'\rangle$:

- $\tilde{f}_0/D \in \prod a/D$ beliebig.
- Seien $\langle \tilde{f}_\gamma : \gamma < \beta \rangle$ schon definiert und $\beta < \lambda'$. Wir nehmen $h_\beta/D \geq \tilde{f}_\gamma/D$ für alle $\gamma < \beta$; so ein h_β/D gibt es, da $\mathrm{cf}\,(\prod a/D) = \lambda > \beta$. Für $\alpha \in a$, $E \subseteq \lambda'$ definieren wir

$$g^\beta_E(\alpha) = \max(h_\beta(\alpha), \sup\{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in E, \text{ falls } \alpha > \mathrm{otp}(E)\}) \geq h_\beta(\alpha).$$

Damit ist die Induktion beendet.

Da $\lambda' < \lambda$ und $|\mathscr{C}_\beta| \leq \lambda'$ gibt es $f_\beta/D \geq_D \langle g^\beta_E/D : E \in \mathscr{C}_\beta \rangle$.

Wir stellen fest, dass $\mu = \lim_D a$ eine Limeskardinalzahl ist, denn D ist ein freier Ultrafilter.

Sei $\mu' < \mu$ und daher $\mu'^{+} < \mu$. Es gibt für jedes reguläre $\nu < \lambda'$ Ordinalzahlen $\beta \in \lambda$ mit $\mathrm{cf}(\beta) = \nu$. Wir nehmen $\beta \in \lambda$ mit $\mathrm{cf}(\beta) = \nu = \mu'^{+}$.

Lemma 5.6. *Es gibt kein $\mu' < \mu$ mit $|a|^+ \leq \mu'$ und keine Familie S_α, $\alpha \in a$, $|S_\alpha| \leq \mu'$, so dass $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D$ konfinal in $\langle \tilde{f}_\beta/D : \beta < \lambda' \rangle$ schneidet.*

Beweis Angenommen doch: Seien S_α, $\alpha \in a$ mit $|S_\alpha| \leq \mu$ und $\prod S_\alpha/D$ schneidet konfinal, also

$$\forall \gamma < \lambda' \exists k_\gamma \in \prod S_\alpha/D\ \exists \gamma' > \gamma, \gamma' < \lambda'.\ \tilde{f}_\gamma/D <_D k_\gamma/D <_D f_{\gamma'}/D.$$

Es gibt eine club Menge $B \subseteq \lambda$ so dass

$$\forall \gamma, \gamma' \in B.\ \left(\gamma < \gamma' \to \exists k \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D.\ \tilde{f}_\gamma/D < k/D < \tilde{f}_\gamma/D\right).$$

Induktiv wird nun eine Folge γ_β, $\beta < \lambda'$.

- $\gamma_0 \in \lambda'$ beliebig.
- Falls δ eine Nachfolgerzahl ist, definiere $\gamma_\delta > \sup\{\gamma_\beta : \beta < \delta\}$, so dass es ein $k \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D$ gibt mit $(\tilde{f}_{\gamma_\beta})/D < k/D < (\tilde{f}_{\gamma_\delta})/D$.
- Ist δ eine Limeszahl, setze $\gamma_\delta = \bigcup_{\beta < \delta} \gamma_\beta$

Nun wählen wir ein $\alpha \in a$ mit $|\alpha| = (\mu')^+$ und setzen $E = \{\gamma_\beta : \beta < \alpha\}$. Dann nehmen wir für jedes $\beta < \alpha$ ein $x_\beta \in a$, $x_\beta > \mu'$, so dass $\tilde{f}_{\gamma_\beta}(x_\beta) < g^{\gamma_\beta}_E(x_\beta) < \tilde{f}_{\gamma_{\beta+1}}(x_\beta)$ für $E = \{\gamma_\delta : \delta < x_\beta\}$. Der Ordnungstyp dieses E ist gerade noch klein genug. Da $|a| < \lambda'$, gibt es ein $x \in a$ so dass es $|\alpha|$-viele β gibt mit $x_\beta = x$. Dann ist $|S_x| \geq |\alpha|$ wegen der Definition der g^β_E. Damit ist das Lemma bewiesen. $\dashv$

Wir wenden die Shelah-Trichotomie an und erhalten

$$(\exists g)(g \geq_D \langle \tilde{f}_\alpha : \alpha < \lambda' \rangle).$$

Ohne Einschränkung seien alle $g(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in a$ und $\{\alpha \in a : g(\alpha) \text{ ist eine Limesordinalzahl}\} \in D$, falls nicht wähle $g'(\alpha) = g(\alpha) - 1$ für

Nachfolger bzw. $g'(\alpha) = \bigcup g(\alpha)$. (Es lässt sich sogar annehmen, dass $g(\alpha)$ eine Limeszahl für alle $\alpha \in a$ ist.) Nun fixiere für jedes $\alpha \in a$ ein $S_\alpha \subseteq g(\alpha)$ club mit $\mathrm{otp}(S_\alpha) = \mathrm{cf}(g(\alpha))$, daher gilt insbesondere $|S_\alpha| = \mathrm{cf}(g(\alpha))$.

Behauptung 2. $\lim_{\alpha \in D} \mathrm{cf}(g(\alpha)) = \mu$

Beweis Angenommen, es gibt ein $b \in D$ und $\mu' < \mu$, so dass $\mathrm{cf}(g(\alpha)) \leq \mu'$ für alle $\alpha \in b$. Dann kann für gegebenes $\beta_0 \in \lambda'$ ein $g' \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ gefunden werden, so dass $f_{\beta_0}/D < g'/D < g/D$, da alle g_α Limeszahlen sind. Zum Beispiel $g'(\alpha) = \mathrm{next}(f_{\beta_0}(\alpha), S_\alpha) := \min\{s \in S_\alpha : s > f_{\beta_0}(\alpha)\}$ wann immer $f_{\beta_0}(\alpha) < g(\alpha)$. Da g kleinste obere Schranke ist, gibt es ein $\beta_1 \in \lambda$, so dass

$$f_{\beta_0}/D < g'/D < f_{\beta_1}/D$$

und daher schneidet $\prod_a S_\alpha/D$ die Folge $\langle f_\beta : \beta < \lambda' \rangle$ konfinal, ein Widerspruch zu Lemma 5.6. $\dashv$

Behauptung 3. $\mathrm{cf}\left(\prod_{a \in \alpha} S_\alpha/D\right) = \lambda'$

Beweis Für jedes $\beta \in \lambda'$ gibt es $b_\beta \in D$, so dass $a \in b_\beta \to f_\beta(a) < g(a)$ nach Definition von $f_\beta/D <_D g/D$. Definiere nun:

$$\overline{f_\beta}(\alpha) := \begin{cases} \mathrm{next}(f_\beta(\alpha), S_\alpha) & \text{falls } \alpha \in b_\beta \\ f_\beta & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\overline{f_\beta}/D < g/D$, da alle $g(\alpha)$ Limeszahlen sind. Behauptung 3 wird nun mit zwei Unterbehauptungen bewiesen.

Behauptung 3.1. *$\{\overline{f_\beta} : \beta \in \lambda'\}$ ist konfinal in $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D$, das bedeutet $\mathrm{cf}\left(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D\right) \leq \lambda'$.*

Beweis Sei $f \in \prod S_\alpha$, dann folgt aus der Definition der S_α, dass $f/D < g/D$, aber g/D ist kleinste obere Schranke der f_β, also gibt es ein $\beta \in \lambda'$, so dass $f/D < f_\beta/D \leq \overline{f_\beta}/D \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D$. $\dashv$

Behauptung 3.2. *Es gibt keine kleinere konfinale Familie.*

Beweis Angenommen $\{h_\beta : \beta < \lambda''\} \subseteq \prod S_\alpha/D$, wobei $\lambda'' < \lambda'$. Zuerst finden wir ein $\beta_0 \in \lambda'$, so dass jedes h_β, $\beta \in \lambda''$ eine obere Schranke in $\{\overline{f_\beta} : \beta \in \beta_0\}$ hat. Dann wählen wir für jedes $\beta \in \beta_0$ ein γ_β, so dass $\overline{f_\beta}/D < f_{\gamma_\beta}/D$. Dies ist möglich, da $\overline{f_\beta} < g/D$ und g eine kleinste obere Schranke ist. Wähle nun $\beta_1 = \sup\{\gamma_\beta : \beta \in \beta_0\}$. Es gilt

$$f_\beta/D < f_{\beta_1}/D < \overline{f_{\beta_1}} \in \left(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha\right)/D$$

Daher ist $\overline{f_{\beta_1}}$ eine obere Schranke von $\{h_\beta : \beta < \lambda''\}$ $\dashv$

$\dashv$

Definiere nun $a' := \{\mathrm{cf}(g(\alpha)) : \alpha \in a\}$ und

$$A \in D' :\Leftrightarrow \{\alpha \in a : \mathrm{cf}(g(\alpha)) \in A\} \in D.$$

Behauptung 4. $\lim_{D'} a' = \mu$

Beweis Falls $\mu' < \mu$, wissen wir mit Behauptung 1, dass $\{\alpha \in a : \mathrm{cf}(g(\alpha)) \geq \mu'\} \in D$. Nach Definition von D' ist $\{\alpha \in a : \alpha \geq \mu'\} \in D'$ und daher $\lim_{D'} a' > \mu'$. $\dashv$

Behauptung 5. $\mathrm{cf}\,(\prod a'/D') = \lambda'$

Beweis Der Beweis erfolgt mit drei Unterbehauptungen.

Behauptung 5.1. *Es gibt eine in $\prod a'/D'$ konfinale Familie der Größe λ'.*

Beweis Zuerst definiere $F_\alpha : S_\alpha \to \mathrm{cf}(g(\alpha))$ durch $F_\alpha(x) = \mathrm{otp}(x \cap S_\alpha)$. Definiere

$$\overline{f_\beta}'(\mathrm{cf}(g(\alpha)) := \sup\{F_\alpha(\overline{f_\beta}(\gamma)) : \gamma \in a \wedge \mathrm{cf}(g(\alpha)) = \mathrm{cf}(g(\gamma))\}.$$

$\dashv$

Für D-viele α, haben wir $\overline{f_\beta}'(\mathrm{cf}(g(\alpha))) < \mathrm{cf}(g(\alpha))$, daher gilt auch $\overline{f_\beta}'(\alpha) < \alpha$ für $\alpha \in a$.

Behauptung 5.1.1. *$\langle \overline{f_\beta}' : \beta \in \lambda' \rangle$ ist konfinal in $\prod a'/D$.*

Beweis Nehme $f' \in \prod a'$, dann definiere $f \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ durch den Lift bzw. Kollaps:

$$f(\alpha) := F_\alpha^{-1}(f'(\mathrm{cf}(g(\alpha))))$$

Wegen der Konfinalität der $\overline{f_\beta}$ in $\prod S_\alpha/D$ gibt es ein $\beta \in \lambda'$, so dass $\overline{f_\beta} > f$. Dann gibt es D-viele $\alpha \in a$, so dass

$$f'(\mathrm{cf}(g(\alpha))) = F_\alpha(f(\alpha)) <_{\mathbf{On}} F_\alpha(f_\beta(\alpha)) \leq_{\mathbf{On}} \overline{f_\beta}'(\mathrm{cf}(g(a))).$$

Daher ist $\langle f'_\beta : \beta \in \lambda \rangle$ konfinal in $\prod a'/D$. $\dashv$

$\dashv$

Aus der obigen Behauptung folgt $\mathrm{cf}\,(\prod a'/D') \leq \lambda'$

Behauptung 5.2. $\mathrm{cf}\,(\prod a'/D') \geq \lambda'$

Beweis Es wird gezeigt, dass keine Familie, die kleiner als λ' ist, konfinal ist. Nehme hierfür $\{h'_\beta : \beta \in \lambda''\}$, wobei $\lambda'' < \lambda'$. Jedes h'_β liefert ein $h_\beta \in \prod S_\alpha/D$, aber $\mathrm{cf}\left(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha\right) = \lambda'$, daher gibt es eine obere Schranke $\overline{f}_\beta \in \prod S_\alpha$. Daher beschränkt $\overline{f'}_\beta$ $\{h'_\beta : \beta \in \lambda''\}$ in $\prod a'/D'$. $\dashv$

Somit ist der Intervallsatz bewiesen.

Kapitel 6

Der Satz von Silver über die Exponentiation

Satz 6.1. *Wenn κ eine singuläre Kardinalzahl mit* $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ *ist und* $E = \{\mu < \kappa : 2^\mu = \mu^+\}$ *stationär in* κ *ist, dann gilt* $2^\kappa = \kappa^+$.

Definition 6.2. Wenn $S \subseteq \mathbf{On}$ und wir für jedes $\alpha \in S$ ein $\beta_\alpha \subseteq \mathbf{V}$ haben, dann sagen wir $F \subseteq \prod_{\alpha \in S} \beta_\alpha$ ist fast disjunkt, falls es für alle $f, g \in F$ mit $f \neq g$ ein $\alpha_0 \in S$ gibt, so dass

$$\forall \alpha \in S \setminus \alpha_0.\ f(\alpha) \neq g(\alpha)$$

Erinnerung 6.3. $f \in \prod_{\alpha \in S} B_\alpha$ *ist eine Auswahlfunktion, also* $f : S \to \bigcup B_\alpha$ *mit* $f(\alpha) \in B_\alpha$.

Definition 6.4. Eine Funktion $f : \lambda \to \kappa$ wird als normal bezeichnet, wenn sie streng monoton wachsend, (in κ) konfinal und stetig ist.

Lemma 6.5. *Sei* $\omega < \lambda = \mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\lambda) < \kappa = 2^{<\kappa} := \bigcup_{\gamma<\kappa} 2^\gamma$ *und es gebe eine normale Funktion* $e : \lambda \to \kappa$, *um die Notation zu vereinfachen definiere* $\kappa_\alpha = e(\alpha)$ *für jedes* α. *Dann hat für jedes stationäre* $S \subseteq \lambda$ *jede fast disjunkte Familie* $\mathscr{F}$ *von* $\prod_{\alpha \in S} \kappa_\alpha$ *die Kardinalität höchstens* κ.

Beweis Bemerke, dass $C := \{\alpha \in \lambda : \lim(\alpha)\}$ club in λ ist, also ist $S \cap C$ stationär. Bemerke auch, dass $\mathscr{F} \restriction S \cap C := \{f \restriction S \cap C : f \in \mathscr{F}\}$ fast disjunkt ist. Also enthält S ohne Einschränkung nur Limeszahlen. Nehme nun $f \in \mathscr{F}$ und bemerke, dass $f(\alpha) < \kappa_\alpha$. Wähle zu jedem α ein $\beta_\alpha < \alpha$, so dass $f(\alpha) < \kappa_{\beta_\alpha} < \kappa_\alpha$ und definiere $g(\alpha) = \beta_\alpha$. g ist regressiv und auf einer stationären Menge definiert.

Nach dem Lemma 3.8 (von Fodor) fixiere ein $\beta \in \lambda$ und eine stationäre Menge $S_f \subseteq S$, so dass für alle $\alpha \in S_f$ aus $g(\alpha) = \beta$ gilt. Daraus folgt $f(\alpha) < \kappa_\beta$ für alle $\alpha \in S_f$. Da S_f stationär ist, identifiziert $f \restriction S_f$ f eindeutig innerhalb von $\mathscr{F}$. Es gilt:

$$f \restriction S_f \in \bigcup \{\mu^T : T \subseteq \lambda, \mu \in \kappa\}$$

Wir wissen $|\mu^T| = \mu^{|T|} \leq \mu^\lambda \leq 2^{\max(\mu,\lambda)} \leq 2^{<\kappa} = \kappa$. Das Lemma ist mit $|\mathscr{F}| \leq (2^\lambda \cdot \kappa) \cdot \kappa = \kappa$ bewiesen. $\dashv$

Lemma 6.6. *Sei $\langle P, <_P \rangle$ eine partielle Ordnung, so dass $\forall p \in P.\ |\{q \in P : p \not<_P q\}| \leq \kappa$. Dann gilt $|P| \leq \kappa^+$.*

Beweis Für jedes $p \in P$ definiere $P_p := \{q \in P : p \not<_P q\}$. Zorns Lemma angewandt auf die partielle Ordnung

$$\langle \{f : \langle \delta, \in \rangle \to \langle P, <_P \rangle \mid \delta \in \mathbf{On}, f \text{ streng monoton wachsend}\}, \subseteq \rangle$$

liefert ein maximales $f : \delta \to P$. Beachte, dass $\forall q \in P \exists \alpha \in \delta.\ f(\alpha) \not<_P q$. Dann ist $P = \bigcup_{\alpha \in \delta} P_{f(\alpha)}$. Es gilt, dass $f[\alpha] := \{f(\beta) : \beta \in \alpha\} \subseteq P_{f(\alpha)}$. Daher $|\alpha| = |f[\alpha]| \leq \kappa$, aber $\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} \alpha$, daher $|\delta| \leq \kappa^+$ und somit $|P| \leq |\delta| \cdot \kappa \leq \kappa^+$. $\dashv$

Bemerkung 6.7 (Magidor 1977, [9, 10])**.** *Con(große Kardinalzahl) $\to$ Con($\forall n.\ 2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ und $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$)*

Fakt 6.8. *Sei $f : \lambda \to \kappa$ normal und unbeschränkt, dann gelten*

a) $C \subseteq \lambda$ *club in* $\lambda \Leftrightarrow f''C$ *club in* κ

b) $S \subseteq \kappa$ *stationär in* $\kappa \Leftrightarrow f^{-1''}S \subseteq \lambda$ *stationär in* λ

Beweis

a) Da C unbeschränkt ist, ist auch $f''C$ unbeschränkt, denn für $\beta \in \lambda$ gegeben existiert ein $\alpha \in \lambda$ mit $f(\alpha) \geq f(\beta)$. Daher $\exists \alpha' > \alpha, \alpha' \in C.\ f(\alpha') \geq f(\alpha) \geq f(\beta)$. Da C abgeschlossen und f stetig ist, ist $f''C$ abgeschlossen.

b) Sei $S \subseteq \kappa$ stationär, angenommen $f^{-1''}S \subseteq \lambda$ nicht stationär. Sei $C \subseteq \lambda$ club, so dass $C \cap f^{-1''}S = \emptyset$. Dann ist $f''C \subseteq \kappa$ club. Es gilt $\underbrace{f''(C)}_{\text{club}} \cap S = f(C \cap f^{-1''}S) = \emptyset$, im Widerspruch dazu, dass S stationär in κ ist.

$\dashv$

Beweis[Beweis von Satz 6.1 (von Silver)] Anwendung von Teil *b)*: $S_0 = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \kappa_\alpha \in E\}$ ist stationär in $\mathrm{cf}(\kappa)$. Definiere die Kodierung:

$$F_{\text{Code}} : \mathscr{P}(\kappa) \to \prod_{\alpha \in S_0} \mathscr{P}(\kappa_\alpha), \quad A \mapsto f_A = \langle A \cap \kappa_\alpha : \alpha \in S_0 \rangle.$$

$\{f_A : A \subseteq \kappa\}$ ist eine Menge fast disjunkter Familien, denn aus $A \neq B$ folgt $\exists \alpha_0 \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ und es existiert ein β, so dass $\kappa_\beta > \alpha_0$. Dann ist $f_A(\beta') \neq f_B(\beta')$ für alle $\beta' > \beta$.

Da für $A \neq B \subseteq \kappa$ f_A fast disjunkt von f_B ist, ist inbesondere $f_A \neq f_B$, also ist $A \mapsto f_A$ injektiv. Für $\alpha \in S_0$ gilt $|\mathscr{P}(\kappa_\alpha)| = 2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$. Seien $b_\alpha : 2^{\kappa_\alpha} \to \kappa_\alpha^+$ bijektiv für $\alpha \in S_0$, dann definiere

$$\tilde{f}_A(\alpha) = b_\alpha(A \cap \kappa_\alpha) \in \kappa_\alpha^+$$

Dann ist auch $\{f_A : A \subseteq \kappa\} \xrightarrow{\sim} \{\tilde{f}_A : A \subseteq \kappa\}$ bijektiv. Nun wird abgeschnitten:
Seien $f, g \in \prod_{\alpha \in S_0} \kappa_\alpha^+$. Wir definieren

$$f <_{\text{club}} g := \exists \text{club } C \subseteq \text{cf}(\kappa)\ \forall \alpha \in S_0 \cap C.\ f(\alpha) < g(\alpha)$$

Nun stellen wir fest:

1. $<_{\text{club}}$ ist transitiv
2. $\forall g \in \prod_{\alpha \in S_0} \kappa_\alpha^+.\ |\{f : g \not<_{\text{club}} f\}| \leq \kappa$.

Beweis

1. Der Schnitt zweier clubs ist wieder club. $\dashv$
2. Sei $g \not<_{\text{club}} f$, dann ist $S = \{\alpha \in S_0 : f(\alpha) \leq g(\alpha)\}$ stationär. Definiere

$$F_{S,g} := \{f \upharpoonright S : f \in \{\tilde{f}_A : A \subseteq \kappa\}, f \upharpoonright S \in \prod_{\alpha \in S} (g(\alpha) + 1)\}$$

Dann ist

$$\bigcup_{\substack{g \in \prod_{\alpha \in S_0} \kappa_\alpha^+ \\ S \subseteq S_0}} F_{S,g} = \{\tilde{f}_A : A \subseteq \kappa\}.$$

Jedes $F_{S,g}$ erfüllt die Voraussetzung von Lemma 6.5, denn wir haben, dass S stationär ist und $F_{S,g} \subseteq \prod_{\alpha \in S} \kappa_\alpha$. Daher ist nach dem Lemma $|F_{S,g}| \leq \kappa$.

Es gilt $\bigcup_{\substack{S \subseteq S_0 \\ S \text{ stat.}}} F_{S,g} = \{f : f \not>_{\text{club}} g\}$

$\dashv$

Wir haben

$$\left| \bigcup_{S \subseteq S_0} F_{S,g} \right| \leq \underbrace{|\mathscr{P}(S_0)|}_{=2^{\text{cf}(\kappa)}} \cdot |F_{s,g}|.$$

Nach Voraussetzung existieren konfinal viele $\kappa_\alpha < \kappa$ mit $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$. Wir nehmen ein κ_{α_0}, so dass $\kappa_{\alpha_0} \geq \text{cf}(\kappa)$, damit ist $2^{\text{cf}(\kappa)} \leq 2^{\kappa_{\alpha_0}} = \kappa_{\alpha_0}^+ \leq \kappa$ und damit ist $|\bigcup_{S \subseteq S_0} F_{S,g}| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$. $\dashv$

Kapitel 7

Jónsson-Algebren

Definition 7.1 (Jónsson-Algebra, 1972)**.** $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i\in\omega})$ heißt Jónsson-Algebra genau dann, wenn für alle algebraischen Substrukturen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt:

$$|B| = |A| \Rightarrow B = A$$

Beispiel 7.2.

- *$(\omega, 0, S)$ mit $S : n \mapsto n + 1$ ist eine Jónsson-Algebra.*
- *Definiere $\mathfrak{A}_1 = (\aleph_1, 0, \omega, S, f_{Paar})$ mit dem einstelligen Prädikatensymbol ω und $f_{Paar} : \aleph_1 \times \omega \to \aleph_1$, $\forall\alpha.\ f_{Paar}(\alpha, \cdot) : \omega \to \alpha$ bijektiv. Dann ist $\mathfrak{A}_1$ eine Jónsson-Algebra auf $\aleph_1$. Beweis Sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}_1, |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}_1|$. In B gibt es (in $\aleph_1$) konfinal viele Elemente und wegen $f_{Paar}(\alpha, \cdot)''\omega = \alpha$ gibt es keine Lücken.* $\dashv$

Bemerkung 7.3. *Durch ähnliches Vorgehen wie bei $\mathfrak{A}_1$ aus dem vorherigen Beispiel, lässt sich erkennen, dass es auf jedem $\aleph_n$ eine Jónsson-Algebra gibt (siehe Sätzchen 7.14). Die Frage nach der Existenz einer solchen Algebra auf $\aleph_\omega$ ist allerdings bisher ungeklärt. $\aleph_{\omega+1}$ trägt eine Jónsson-Algebra.*

Definition 7.4. Eine Kardinalzahl κ heißt Jónsson-Kardinalzahl genau dann, wenn es <u>keine</u> Jónsson-Algebra auf κ gibt.

Bemerkung 7.5. *Die Existenz von regulären Jónsson-Kardinalzahlen impliziert die Existenz von großen Kardinalzahlen.*

Es folgen ein paar grundlegende Definitionen die für das nächste Lemma benötigt werden.

Definition 7.6. Sei x eine Menge. Dann ist die transitive Hülle bzw. der transitive Abschluss

$$\mathrm{tc}(x) = \underbrace{x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \dots}_{\omega \text{ oft}}$$

Behauptung 7.7.

- $\mathrm{tc}(x) \supseteq x$ *und* $\mathrm{tc}(x)$ *ist als Menge transitiv, also* $\forall y \in \mathrm{tc}(x) \forall z \in y.\ z \in \mathrm{tc}(x)$.

- *Es gilt* $\{z \in \operatorname{tc}(x) : z \in y\} = y^{\operatorname{tc}(x)} = y^{\mathbf{V}} = \{z \in \mathbf{V} : z \in y\}$.

Beispiel 7.8. $\{\omega_1\}$, $\operatorname{tc}(\{\omega_1\}) = \{\omega_1\} \cup \omega_1 = \omega_1 + 1$.

Definition 7.9. Sei θ regulär, dann heißt

$$H(\theta) = \{x \in \mathbf{V}_\theta : |\operatorname{tc}(x)| < \theta\}$$

die Menge der Mengen von erblicher (hereditary) Mächtigkeit $< \theta$. Man sagt x hat erbliche Mächtigkeit $< \theta$, wenn $|\operatorname{tc}(x)| < \theta$.

Bemerkung 7.10.
- *κ ist stark unerreichbar, also $\forall \mu < \kappa.\ 2^\mu < \kappa$ genau dann, wenn $\mathbf{V}_\kappa = H(\kappa)$.*
- *$H(\theta) \models \mathsf{ZFC} \setminus \{$Potenzmengenaxiom$\}$ für reguläres $\theta > \omega$.*
- *$H(\theta) \models \mathsf{ZFC} \setminus \{$Potenzmengenaxiom, Ersetzungsaxiom$\}$ für $\theta > \omega$.*
- *$H(\omega) \models \mathsf{ZFC} \setminus \{$Unendlichkeitsaxiom$\}$.*

Lemma 7.11. a) *$H(\theta)$ ist transitiv*

b) *Für jede unendliche reguläre Kardinalzahl θ ist $H(\theta) \subseteq \mathbf{V}_\theta$.*

Beweis

a) Beweis durch $\in$-Induktion über x. Gezeigt wird, dass $x \in H(\theta) \Rightarrow x \subseteq H(\theta)$.

- Induktionsanfang $x = \emptyset$, dann ist nichts zu zeigen.
- Induktionsschritt: $z, z \in x \mapsto x$: Sei $y \in x$. $|\operatorname{tc}(y)| \leq |\operatorname{tc}(x)|$, daher $y \in H(\theta)$.

b) Beweis durch Induktion über ϵ:

- Induktionsanfang: $x = \emptyset$. Dann gilt $\emptyset \in H(\theta)$ und $\theta \in \mathbf{V}_\theta$.
- Induktionsschritt: $y, y \in x \mapsto x$. Sei $x \in H(\theta)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für jedes $y \in x$, $y \in H(\theta)$ (wegen $y \in x \in H(\theta)$) und $y \in \mathbf{V}_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} \mathbf{V}_\alpha$, da θ eine Kardinalzahl ist. Wir nehmen für jedes $y \in x$ ein $\alpha_y < \theta$ mit $y \in \mathbf{V}_{\alpha_y}$, dann gilt $\alpha' = \sup\{\alpha_y : y \in x\} < \theta$, da $|x| < \theta$ und θ regulär ist. Es gilt $x \subseteq \mathbf{V}_{\alpha'}$ und damit $x \in \mathbf{V}_{\alpha'+1} = \mathscr{P}(\mathbf{V}_{\alpha'})$.

$\dashv$

Beispiel 7.12. *$\mathbf{V}_\theta \setminus H(\theta)$ kann nicht leer sein. Sei $\theta = 2^\chi$, $\chi < \theta$, dann ist $\chi \in \mathbf{V}_{\chi+1}$ und $\mathscr{P}(\chi) \in \mathbf{V}_{\chi+2} \subseteq \mathbf{V}_\theta$. Es gilt $|\mathscr{P}(\chi)| = 2^\chi$ und daher $|\operatorname{tc}(\mathscr{P}(\chi))| \geq 2^\chi = \theta$ und damit $\mathscr{P}(\chi) \notin H(\theta)$.*

Lemma 7.13. *Äquivalent sind:*

1) λ trägt eine Jónsson-Algebra

2) Es existiert eine reguläre Kardinalzahl $\theta \geq \lambda^+$*, so dass* $\forall M \prec (H(\theta), \in, <_*$
$)$

$$(\lambda \in M \wedge |M \cap \lambda| = \lambda \rightarrow \lambda \subseteq M).$$

$<_*$ *ist hierbei und im Folgenden eine Wohlordnung.*

3) Für alle regulären Kardinalzahlen $\theta \geq \lambda^+$ *gilt* $\forall M \prec (H(\theta), \in, <_*)$

$$(\lambda \in M \wedge |M \cap \lambda| = \lambda \rightarrow \lambda \subseteq M).$$

Beweis

- 3) $\Rightarrow$ 2) folgt direkt.
- 1) $\Rightarrow$ 3): Sei $\mathfrak{A} = (\lambda, (f_i)_{i\in\omega})$ eine Jónsson-Algebra auf λ und sei $\theta \geq \lambda^+$, θ regulär. Sei $M \prec H(\theta, \in, <_*)$, $\lambda \in M$, $|\lambda \cap M| = \lambda$.

  Dann gilt $H(\theta) \models$ „Es gibt eine Jónsson-Algebra auf λ“ bzw. $H(\theta) \models$ „$\exists (f_i)_{i\in\omega} \forall B \subseteq \lambda.$ ($|B| = \lambda \rightarrow$ Abschluss von B unter $(f_i)_{i\in\omega}$ ist λ)“ $=:$ φ, welcher ein erststufiger Satz ist.

  $M \prec (H(\theta), \in, <_*)$ angewandt auf φ ergibt $M \models$ „Es gibt eine Jónsson-Algebra auf λ“. Sei also $\mathfrak{A}' = (\lambda, (f_i')_{i\in\omega})$ gegeben mit $M \models$ „$\mathfrak{A}'$ ist eine Jónsson-Algebra auf λ“. Sei $B = \lambda \cap M$, nun ist das Ziel zu zeigen, dass $B = \lambda$. B ist unter (f_i') abgeschlossen, da alle $f_i' : (\lambda \cap M)^n \rightarrow \lambda \cap M$. Definiere $\mathfrak{B} = (B, (f_i')_{i\in\omega}) \subseteq \mathfrak{A}$, nach Voraussetzung ist $|B| = \lambda$. Da $\mathfrak{A}'$ eine Jónsson-Algebra ist, ist $B = \lambda$, also $\lambda \subseteq M$.
- 2) $\Rightarrow$ 1): Sei $\theta \geq \lambda^+$ wie in 2). Sei $M \prec (H(\theta), \in, <_*)$ und $|M| = \lambda$, $\lambda \subseteq M$, was nach dem Satz von Löwenheim-Skolem (siehe zum Beispiel [14, Theorem 2.3.1]) existiert. Wir expandieren $(M, \in)$ zu $(M, \in, h)$ wobei $h : \lambda \overset{\text{bij.}}{\rightarrow} M$. Die Expansion $(M, \in, h, sk)$ von $(M, \in, h)$ durch die Skolemfunktion ist eine Jónsson-Algebra.

  Tatsache: $N \subseteq (M, \in, h, sk) \Rightarrow N \preceq (M, \in, h, sk)$.
  Zu zeigen: $(N, \in, h \upharpoonright N, sk^{\upharpoonright N}) \subseteq (M, \in, h, sk), |N| = \lambda$

  $\Rightarrow \lambda \in N$, da $\lambda = \min(\mathbf{On} \setminus \mathrm{dom}(h)) \in M$. Es gilt $N \cap \lambda = h^{-1}{''}N$, da $N \models h : \lambda \rightarrow$ Träger, $M \models \forall x \exists a < \lambda.\ h(\alpha) = y$ und damit $N \models \forall x \exists a < \lambda.\ h(\alpha) = y$. Es gilt also $\lambda \subseteq N$ wegen der Voraussetzung des Lemmas und es gilt $\mathrm{rge}(h) = M \subseteq N$, also $M = N$.

$\dashv$

Sätzchen 7.14. *Wenn* λ *eine Jónsson-Algebra trägt, dann auch* λ^+*.*

Beweis Sei $\mathfrak{A}$ eine Jónsson-Algebra auf λ, dann ist $(\lambda^+, \mathfrak{A}, f_{\text{Paar}})$, $f_{\text{Paar}} : \lambda^+ \times \lambda \rightarrow \lambda^+$ mit $\forall \alpha < \lambda^+.\ f(\alpha, \cdot) : \lambda \rightarrow \alpha$ bijektiv eine Jónsson-Algebra auf λ^+. $\dashv$

Definition 7.15. Sei $S \subseteq \kappa$, S stationär und $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. S heißt reflektierend, wenn es ein $\alpha < \kappa$ gibt, so dass $S \cap \alpha$ stationär in κ ist.

Beispiel 7.16. *Sei κ regulär und $S_\kappa^{\kappa^+} = \{\alpha \in \kappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$ stationär in κ^+. $S_\kappa^{\kappa^+}$ reflektiert nicht. Angenommen $\exists \alpha < \kappa^+$. $S_\kappa^{\kappa^+} \cap \alpha$ stationär in α .*

- *1.Fall:* $\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa$*, also $\alpha \notin S_\kappa^{\kappa^+}$, dann ist α kein Limes von $S_\kappa^{\kappa^+}$. Definiere $C := [\sup(S_\kappa^{\kappa^+} \cap \alpha), \alpha)$, was ein Endabschnitt von α, also ein club in α ist. Es gilt $C \cap S_\kappa^{\kappa^+} = \emptyset$, ein Widerspruch.*

- *2. Fall:* $\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$*. Nehme $C \subseteq \alpha$,* $\mathrm{otp}(C) = \kappa$*, C club in α, zum Beispiel $f : \kappa \to \alpha \setminus S_\kappa^{\kappa^+}$ (konfinal, stetig und monoton) und $C = f''\kappa$ ist ein club in α. Aber es gilt $C \cap S_\kappa^{\kappa^+} = \emptyset$, ein Widerspruch.*

Bemerkung 7.17. $\mathbf{V} = \mathbf{L}$: *Jede stationäre Teilmenge von κ ist reflektierend $\Leftrightarrow$ κ ist eine reguläre Limeszahl.*

Satz 7.18 (Tryba, Woodin, 1980, [16])**.** *Wenn λ regulär ist und es eine nicht-reflektierende Teilmenge $S \subseteq \lambda$ gibt, dann trägt λ eine Jónsson-Algebra.*

Beweis $H(\lambda^+) \models$ „Ex. S, S stationär in κ, S reflektiert nicht“. Wir zeigen den Satz mit dem Kriterium 2) $\to$ 1) des Lemmas 7.13 mit $\theta = H(\lambda^+)$. Sei also $M \prec (H(\lambda^+), \in, <_*)$, $\lambda \in M$, $|M \cap \lambda| = \lambda$, dann ist $\lambda \subseteq M$ zu zeigen.

Definiere $C_M := \{\alpha < \lambda : \sup(M \cap \alpha) = \alpha\}$.

Behauptung. $C_M \cap S \subset M$

Beweis[Indirekter Beweis] Angenommen $\alpha \in C_M \cap S \setminus M$. $M \models$ „S reflektiert nicht“, da $M \prec H(\lambda^+)$. Wir haben $\alpha \in \lambda$. Es gilt also $\gamma \in S$, S reflektiert nicht. Wir nehmen $\gamma = \min(M \setminus \alpha)$. Sei $C_\gamma \in M$ ein Zeuge, dass in M's Sicht S in γ nicht reflektiert, d.h., $C_\gamma \subseteq \gamma$ und $C_\gamma \cap S = \emptyset$. Es gilt

$$M \models C_\gamma \text{ club, o.E. } \gamma > \alpha \text{ und } \gamma \in M.$$

Wir haben $S \in M$. Da $\gamma \in M$ minimal über α ist, gilt $C_\gamma \cap \alpha \neq \emptyset$ und sogar, dass C_γ konfinal in α ist. C_γ ist nicht nur club in M sondern auch club in $H(lambda^+)$. Daher ist $\alpha \in C_\gamma$. Da andrerseits $\alpha \in S$, haben wir einen Widerspruch zu $C_\gamma \cap S = \emptyset$. $\dashv$

Übung 7.1. Zum „Selbermachen”: Anleitung zum schrittweisen Beweis des Satzes:

Satz 7.19 (Solovay (1971), [12, 6])**.** *Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Dann lässt sich κ in κ (viele) disjunkte stationäre Mengen zerlegen.*

Sei $S = \{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$.

1. Zeigen Sie, dass S stationär in κ ist.

2. Beweisen Sie mit AC: Zu jedem $\alpha \in S$ es gibt eine aufsteigende Folge $\langle \delta_i^\alpha : i \in \omega \rangle$, die gegen α konvergiert, und es gibt die Funktion

$$\big\langle \langle \delta_i^\alpha : i \in \omega \rangle : \alpha \in S \big\rangle.$$

Falls $\alpha \in S$ und $\beta < \alpha$, definieren wir die Färbung $C(\beta, \alpha) := \min\{n \in \omega : \delta_n^\alpha > \beta\}$.

Wir halten β fest und lassen α laufen.

3. Gibt es eine stationäre Menge $R_\beta \subseteq S \setminus (\beta + 1)$ und eine Farbe n_β, so dass $\forall \gamma \in R_\beta$, $C(\beta, \gamma) = n_\beta$?

Seien $\beta \in \kappa$ und R_β und n_β wie oben. Wir definieren $f_\beta \colon R_\beta \to \kappa$ durch $f_\beta(\alpha) = \delta_{n_\beta}^\alpha$.

4. Gibt es eine stationäre Menge $S_\beta \subseteq R_\beta$ und ein δ^β, so dass $\forall \alpha \in S_\beta$, $f_\beta(\alpha) = \delta^\beta$?

Nun lassen wir β laufen.

5. Gibt es eine konfinale Menge $I \subseteq \kappa$, so dass $\forall i, j \in I$ gilt: Falls $i < j$, so $\delta^{\beta_i} < \beta_j$?
6. Gibt es ein $n \in \omega$ und $J \subseteq I$ mit den folgenden Eigenschaften?
   - J ist konfinal in κ, und
   - $\forall i < j \in J$, $\delta^{\beta_i} < \beta_j$, und
   - $\forall j \in J$, $n_{\beta_j} = n$.
7. Falls n_β wie in 3. gewählt ist, f_β wie zwischen 3. und 4. definiert ist, S_β wie in 4. gewählt ist, I wie in 5. gewählt ist und J die Eigenschaften unter 6. hat, ist dann $S_{\beta_i} \cap S_{\beta_j} = \emptyset$ für alle $i \neq j \in J$?

Freiwillig:

(I) Ideen zur Verallgemeinerung des obigen Beweisweges:

   (a) Falls $\kappa > \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, funktioniert der Beweis mit $\mathrm{cf}(\kappa)$ vielen disjunkten stationären Mengen.

   (b) In der Definition von S kann man statt ω jede reguläre Kardinalzahl $\omega \leq \mu < \mathrm{cf}(\kappa)$ nehmen.

   (c) Etwas schwieriger: Man kann jede in κ stationäre Menge in $\mathrm{cf}(\kappa)$ viele disjunkte stationäre Mengen zerlegen. Falls κ eine Limeskardinalzahl ist und kein S_μ^κ stationär in S ist, muss man die Folgen in Schritt 2 von unterschiedlicher Länge nehmen. Statt des Schubfachprinzips wendet man dann nochmals das Lemma von Fodor an.

(II) Andere Beweiswege: Mit über ZFC hinausgehenden Voraussetzungen.

Beispiel: $\Diamond_{\omega_1}(S)$ wird für stationäres S definiert und sagt: Es gibt eine Karo-Folge für S. $\langle D_\beta : \beta \in S \rangle$ ist eine Karo-Folge für S, wenn gilt:

$$\text{Für jedes } X \subseteq \omega_1 \text{ ist } \{\alpha \in S : X \cap \alpha = D_\alpha\} \text{ stationär.}$$

Durch Forcing oder durch Betrachtung von inneren Modellen zeigt man: Wenn ZFC konsistent ist, so auch ZFC zusammen mit $\diamondsuit_{\omega_1}(S)$.

Überlegen Sie sich:
Unter $\diamondsuit_{\omega_1}(S)$ gibt es $\aleph_2$ stationäre Teilmengen von S, so dass der Schnitt von je zwei verschiedenen nur abzählbar groß ist. Man nimmt ein System $\{a_\alpha : \alpha < \aleph_2\}$ von fast disjunkten Teilmengen von $\aleph_1$ und eine Karofolge $\langle D_\beta : \beta \in S\rangle$. Dann ist $S_\alpha = \{\beta \in S : D_\beta = a_\alpha \cap \beta\}$ $\alpha \in \aleph_2$, wie gewünscht.

Dieser Satz angewandt liefert: $\overline{S} = \langle S_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ disjunkt stationär. Wir zeigen wie im Beweis der Behauptung $S_\alpha \cap C \subset M$ mit $f : x \mapsto \alpha$ für $x \in \alpha$, wobei $f : \mathbf{V} \to \lambda$, $f \in H(\lambda^+)$. Daraus folgt $(M, f) \prec (H(\lambda^+), f)$ und daher $\alpha \in M$. ⊣

Korollar 7.20. *Sei κ regulär, dann trägt κ^+ eine Jónsson-Algebra.*

Beweis $S_\kappa^{\kappa^+} := \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa^+) : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\} \subseteq \kappa^+$ reflektiert nicht. (vgl. Beispiel 7.16) ⊣

Definition 7.21.
- $[\kappa^+]^2 := \{(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa : \alpha < \beta\}$ oder äquivalent $[\kappa^+]^2 = \{\{\alpha, \beta\} : \alpha \neq \beta \in \kappa\}$.
- Man schreibt $\kappa \to (\lambda)^n_\mu$, falls für alle $f : [\kappa]^n \to \mu$ $\exists H \subseteq \kappa.$ $(|H| = \lambda \wedge |f''[H]^n| = 1)$
- Man schreibt $\kappa \to [\lambda]^n_\mu$, falls für alle $f : [\kappa]^n \to \mu$ $\exists H \subseteq \kappa.$ $(|H| = \lambda \wedge f''[H]^n \neq \mu)$

Satz 7.22 (Erdős, Hajnal, Rado, Maté)**.** *Sei $2^\kappa = \kappa^+$. Dann*

$$\exists f : \left[\kappa^+\right]^2 \to \kappa^+ \ (\forall A \subseteq \kappa^+.\ (|A| = \kappa^+ \to f''[A]^2 = \kappa^+))$$

oder abkürzend $\kappa^+ \not\to [\kappa^+]^2_\kappa$.

Beweis $[\kappa^+]^\kappa = \underbrace{\{S_\beta : \kappa \leq \beta < \kappa^+\}}_{\kappa^+\text{-viele}}$ sei eine Aufzählung, ohne Einschränkung $S_\beta \subseteq \beta$.

Für α aus dem Intervall (κ, κ^+) wollen wir $f(\cdot, \alpha)$ definieren, so dass

$$\forall \beta \in [\kappa, \alpha) \forall \nu < \alpha \exists \delta < \alpha.\ (f(\delta, \alpha) = \nu \wedge \delta \in S_\beta) \qquad (*)$$

Sei $[\kappa, \alpha) \times \alpha = \{(\beta_i, \nu_i) : i < \kappa\}$. Die Funktion $f(\cdot, \alpha)$ wird induktiv über i definiert; im Schritt $i < \kappa$ nehme ein $\delta_i \in S_{\beta_i} \setminus \underbrace{\{\delta_j : j < i\}}_{<\kappa}$ und setze $f(\delta_i, \alpha) = \nu_i$. Nach aufstocken von $f(\cdot, \alpha)$ zu einer auf α definierten Funktion ist (*) erreicht.

Behauptung. $\forall A \subseteq \kappa^+.\ (|A| = \kappa^+ \to f''[A]^2 = \kappa^2)$

Beweis: Für α mit $|A \cap \alpha| = n$ gibt es $\alpha' \geq \alpha$, so dass $f''(\alpha \cap A) \times \{\alpha'\} = \alpha$. Nach (*) ist $\{f(\delta, \alpha) : \delta \in S_\beta\} = \alpha$. ⊣

⊣

Der vorige Satz gilt für viele κ auch ohne die Voraussetzung $2^\kappa = \kappa^+$:

Zitat 7.23 (Todorčević, 1987, [15])**.** $\aleph_1 \not\to [\aleph_1]^2_{\aleph_1}$

Zitat 7.24 (Shelah, Todorčević, 1987)**.**
Falls es eine nicht-reflektierende stationäre Menge in κ gibt, gilt $\kappa^+ \not\to [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$.

Korollar 7.25. *(zu Satz 7.22) (κ^+, f) ist eine Jónsson-Algebra auf κ^+.*

Satz 7.26. *Sei λ singulär und es gebe ein $\mu < \lambda$, so dass es für jede reguläre Kardinalzahl $\kappa \in (\mu, \lambda)$ eine Jónsson-Algebra auf κ gibt. Dann gibt es eine Jónsson-Algebra auf λ^+.*

Beweis Sei $\theta > 2^{2^\lambda}$, θ regulär. Für die Anwendung von Lemma 7.13 möchten wir zeigen:

$$\forall M \prec (H(\theta), \in, <_*).\ (\lambda^+ \in M \wedge |M \cap \lambda^+| < \lambda^+ \to \lambda^+ \subseteq M)$$

Sei M gegeben, $\lambda^+ \in M$ und $|M \cap \lambda^+| = \lambda^+$.

Behauptung. *Wenn $\lambda \subseteq M$, so $\lambda^+ \subseteq M$.*

Beweis $f_{\text{Paar}} : \lambda \times \lambda^+ \to \lambda^+$, $f_{\text{Paar}}(\cdot, \alpha) : \lambda \to \alpha$ bijektiv. Es ist $f_{\text{Paar}} \in H(\theta)$. ⊣

Behauptung. $\lambda \subseteq M$

Beweis Wir nehmen $a \subseteq (\mu, \lambda)_{\text{reg}}$, so dass $|a| = \text{cf}(\lambda)$ und a konfinal in λ. Auch gelte $|a|^+ = (\text{cf}(\lambda))^+ < \min(a)$. Sei D ein Ultrafilter auf A, so dass $\lim_D a = \lambda$. Nach dem Satz 5.2 (vom Intervall) gibt es $a' \subseteq a$, D' auf a', so dass $\text{cf}\left(\prod a'_{/D'}\right) = \lambda^+$.

Unterbehauptung. $\lambda \in M$

Beweis

$$\begin{aligned}
H(\theta) &\models \lambda \text{ ist die Vorgängerkardinalzahl zu } \lambda^+ \\
H(\theta) &\models \exists x.\ x \text{ ist die Vorgängerkardinalzahl zu } \lambda^+ \\
M &\models \exists x.\ x \text{ ist die Vorgängerkardinalzahl zu } \lambda^+ \\
(M &\models x_\lambda \text{ ist die Vorgängerkardinalzahl zu } \lambda^+),\ x_\lambda < \lambda \\
H(\theta) &\models x_\lambda \text{ ist die Vorgängerkardinalzahl zu } \lambda^+),\ x_\lambda > \lambda, \text{ ein Widerspruch} \\
(M &\models x_\lambda \text{ ist die Vorgängerkardinalzahl zu } \lambda^+),\ x_\lambda < \lambda \\
H(\theta) &\models x_\lambda \text{ ist die Vorgängerkardinalzahl zu } \lambda^+),\ x_\lambda < \lambda, \text{ ein Widerspruch}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $M \models \exists a \subseteq \lambda$, a besteht aus regulären Zahlen, ex. Ultrafilter D auf A mit $\lim_D(a) = \lambda$ und $\text{cf}\left(\prod a/D\right) = \lambda^+$.

Daher $M \models \exists\langle h_\xi/D : \xi < \lambda^+\rangle$ konfinal in $\prod a/D$ und $a, D \in M$. Setze

$$A := \{\kappa \in M \cap a : \sup(M \cap \kappa) = \kappa\}$$

Falls $\kappa \in A$, gilt $\kappa \in a$ und daher gibt es nach Vorausetzung eine Jónsson-Algebra auf κ. Aus dem Lemma 7.13 folgt $\kappa \subseteq M$. $\dashv$

Unterbehauptung. *A ist konfinal in λ.*

Beweis Angenommen nicht, dann sei $\lambda' < \lambda$, $A \subseteq \lambda'$ und $M \cap a \not\subseteq \lambda'$, da $M \models a$ ist konfinal in λ. Somit ist $M \cap a$ unbeschränkt in λ.

Es gibt ein $\alpha \in (\lambda', \lambda)_{\text{reg}}$, so dass $\sup(\alpha \cap M) = \alpha$, denn sonst ist $\alpha \mapsto \sup(M \cap \alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in (\lambda', \lambda)$. Wir definieren $\chi_M \colon (\lambda', \lambda)_{\text{reg}} \cap a \to \mathbf{On}$ durch $\chi_M(\alpha) = \sup(M \cap \alpha)$ und erhalten $\forall \alpha \in a \cap (\lambda', \lambda)\ \chi(\alpha) < \alpha\ \chi \in \prod a/D$ für $[\lambda', \lambda)_{\text{reg}} \in D$.

Nun ist $\langle h_\xi/D : \xi < \lambda^+\rangle$ nicht nur aus der Sicht von M konfinal in $\prod a/D$, sondern auch in $H(\theta)$. Daher $\exists \beta < \lambda^+.\ h_\beta/D > \chi/D$ für $\alpha \in D(\cap a)$, so dass $h_\beta(\alpha) \in \alpha \cap M$ mit $h_\beta(\alpha) > \chi(\alpha)$, im Widerspruch zur Definition von χ. $\dashv$

$\dashv$

$\dashv$

Definition 7.27. Sei $\overline{f} = \langle f_\xi : \xi < \lambda\rangle$ $J_{<\lambda}$-aufsteigend. $\overline{f}$ heißt universell für $\lambda \in \text{pcf}(a)$, falls

$$\forall D \Big(D \subseteq \mathscr{P}(a) \wedge D \text{ ultra} \wedge \text{cf} \prod a/D = \lambda \to \langle f_\xi/D : \xi < \lambda\rangle \text{ konfinal in} \prod a/D\Big)$$

Satz 7.28. *Sei a progressiv. Dann gibt es zu jedem $\lambda \in \text{pcf}(a)$ eine universelle Folge.*

Beweis[Beweis vom Satz] O.b.d.A. ist $|a|^+ < \min(a)$. Sei $\lambda \in \text{pcf}(a)$. Ohne Einschränkung ist $\lambda \notin a \subseteq \text{pcf}(a)$.

$<_{J_{<\lambda}(a)}$ ist $< \lambda$-gerichtet, da $|a|^+ < \min(a)$. Daher existiert eine $<_{J_{<\lambda}(a)}$-aufsteigende Folge $\langle f^0_\xi : \xi < \lambda\rangle$. Induktiv über $\delta < |a|^+$ definieren wir $\langle f^\delta_\xi : \xi < \lambda\rangle$, so dass

1) $\langle f^\delta_\xi : \rho < \lambda\rangle$ ist $<_{J_{<\lambda}(a)}$-aufsteigend,

2) für alle $\xi < \lambda$, $\sup\{f^\alpha_\xi : \alpha < \delta\} \leq_{\text{pkt.weise}} f^\delta_\xi$, wobei $\delta < |a^+|$ (daher $|\delta| \leq |a|$) und $\min(a) > |a|^+$.

3) $f^{\delta+1}_0 \geq_{D_\delta} f^\delta_\xi$, falls es so ein $f^{\delta+1}_0$, D_δ gibt.

Der Limesschritt ist durch die zweite Eigenschaft gegeben. Für den Nachfolgerschritt sei angenommen $\langle f^\delta_\xi : \xi < \lambda\rangle$ ist keine universelle konfinale Folge. Dann existiert ein $D = D_\delta$, so dass $\text{cf}\left(\prod a/D\right) = \lambda$ und $\exists h \forall \xi < \lambda.\ h/D > f^\delta_\xi/D$.

Setze $f^{\delta+1}_0 = \max(h, f^\delta_0)$ (punktweise).

Behauptung. *Die Induktion bricht bei einem $\alpha < |a|^+$ ab.*

Beweis Ansonsten setze $h := \sup\{f_0^\alpha : \alpha < |a|^+\}$ punktweise, also für $\beta \in a$ $h(\beta) = \sup\{f_0^\alpha(\beta) : \alpha < |a|^+\}$. Da die Induktion bei $\alpha \in |a|^+$ nicht abbrach, haben wir

$$\exists i_\alpha .\ h <_{D_\alpha} f_{i_\alpha}^{\alpha+1} \leq_{D_\alpha} f_i^{\alpha+1} \text{ für alle } i \geq i_\alpha$$

Es gilt $\lambda > |a|^+$, da a superprogressiv ist und $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$. Da $|a|^+ < \lambda$, gibt es ein $\tilde{i} < \lambda$, so dass

$$\forall \alpha .\ h <_{D_\alpha} f_{\tilde{i}}^{\alpha+1} <_{D_\alpha} d_i^{\alpha+1} \text{ für } i \geq \tilde{i}$$

Für $\alpha \in |a|^+$ sei $a^\alpha = \{\beta : h(\beta) < f_{\tilde{i}}^\alpha(\beta)\}$. Wir haben $f_{\tilde{i}}^\alpha <_{D_\alpha} h \leq_{D_\alpha} f_0^{\alpha+1}$. Daraus folgt $a^\alpha \notin D_\alpha$ und $a^{\alpha+1} \in D_\alpha$. Nach 3) gilt $a^\alpha \subseteq a^{\alpha+1}$, ein Widerspruch. $\dashv$

$\dashv$

7.1 Übungen

Übung 7.2. $f : \kappa \to \lambda$ heißt normal, falls:

i. $\forall \alpha < \beta < \kappa,\ f(\alpha) < f(\beta)$.

ii. $\forall \beta \in \kappa,\ \lim(\beta) \implies f(\beta) = \sup_{\gamma \in \beta} f(\gamma)$.

a) Gilt $(\star)$ $\forall C \subseteq \kappa,\ f''C$ club $\implies C$ club?

b) Nun erfüllt f nur *i*. Gilt dann $(\star)$?

c) Nun erfüllt f nur *ii*. Gilt dann $(\star)$?

Übung 7.3. *a)* Welche Ordinalzahlen gibt es in $H(\omega_1)$?

b) Welche α^β gibt es in $H(\omega_1)$, wenn α, β Ordinalzahlen sind?

Hinweis: Für die nächsten zwei Aufgaben kann Induktion über die $\in$-Relation nützlich sein

Übung 7.4. Sei $x \subseteq H(\theta)$ mit $|x| < \theta$. Zeigen Sie $x \in H(\theta)$.

Übung 7.5. In der Vorlesung zeigten wir, dass die umgekehrte Inklusion $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$ für jedes reguläre κ gilt. Nun sei κ stark unerreichbar (d.h. κ ist regulär und $\forall \mu < \kappa,\ 2^\mu < \kappa$). Gilt dann $V_\kappa \subseteq H(\kappa)$?

Übung 7.6. Ist $\pi^M[M] = \pi^{M}{}''M$ transitiv?

Übung 7.7. *a)* Wann ist π^M injektiv?

b) Ist π^M ein $\in$-Isomorphismus, wenn π^M injektiv ist?

Übung 7.8. Sei nun $M \prec H(\aleph_2, \in)$, M abzählbar.

a) Ist π^M injektiv? (und daher ein Isomorphismus?)

b) Ist $\aleph_1 \in M$?

c) Kann π^M die Identität auf M sein?

d) Ist $\pi^M(\aleph_1) \in \mathbf{On}$?

e) Ist $\mathbf{On} \cap \pi^M[M] \in \mathbf{On}$?

f) Wie groß ist $\mathbf{On} \cap \pi^M[M]$?

g) Kann $\mathbf{On} \cap \pi^M[M] = \pi^M(\aleph_1)$ sein?

Kapitel 8

$\mathrm{tcf}\left(\prod a/I\right)$

Satz 8.1 (von der künstlichen oberen Schranke)**.** *Sei* $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$ *eine aufsteigende und nicht beschränkte Folge in* $\prod a/I$ *und sei* $\min(a) > |a|^+$*. Dann gibt es* $b_\gamma, \gamma < \lambda$*, so dass*

1) $b_\gamma \subseteq a, b_0 \notin I$*,*

2) $b_{\gamma_1} \subseteq_I b_{\gamma_2}$ *für* $\gamma_1 < \gamma_2$*,*

3) $\forall\gamma.\ \langle (f_\alpha \restriction b_\gamma)/I : \alpha < \lambda\rangle$ *ist konfinal in* $\prod b_\gamma/I$ *und*

4) es gibt ein $g \in \prod a/I$ *so dass* $\forall\alpha.\ g \geq_J f_\alpha$ *und* $J = \mathscr{I}(I \cup \{b_\gamma : \gamma < \lambda\})$*.*

Beweis Wir definieren induktiv über $\alpha < |a|^+$ Kandidaten für künstliche obere Schranken g_α und Folgen $\langle b^\alpha_\gamma : \gamma < \lambda\rangle$:

- $g_0 \in \prod a/I$ beliebig
- Limesschritt: $g_\alpha = \sup_{\delta<\alpha} g_\delta$ punktweise, also $g_\alpha(\beta) = \sup_{\delta<\alpha} g_\delta(\beta)$ für $\beta \in a$.
- Nachfolgerschritt: Definiere $b^\alpha_\gamma = \{\beta \in a : g_\alpha(\beta) < f_\gamma(\beta)\} \subseteq a$. Angenommen für ein $\gamma < \lambda$ ist $\langle (f_\rho \restriction b^\alpha_\gamma)/I : \rho < \lambda\rangle$ nicht konfinal in $\prod a/I$, also

  $$\exists\gamma < \lambda \exists h_\gamma \forall\rho < \lambda.\ h_\gamma \not\leq_I f_\rho \restriction b^\alpha_\gamma.$$

  Wir nennen so ein $\gamma = \gamma(\alpha)$ und definieren $g_{\alpha+1} := \max(h_{\gamma(\alpha)}, g_\alpha)$. Es gilt $b^{\alpha+1}_\gamma \subsetneq b^\alpha_\gamma$ für alle γ. Da $\lambda > |a|^+$ existiert ein $\tilde\gamma$, so dass $(\forall\alpha < |a|^+)(\gamma(\alpha) \leq \tilde\gamma$. Dann ist $\forall\alpha.\ b^{\alpha+1}_{\tilde\gamma} \subsetneq b^\alpha_{\tilde\gamma}$, ein Widerspruch, da es keine $|a|^+$ lange absteigende Kette von Teilmengen von a gibt.

Somit bricht die Induktion bei einem Nachfolger α. Aus der Defintion der b^α_γ und der Abbruchbedingung folgt: $\forall\rho < \lambda.\ g_\alpha >_J f_\rho$, wobei $J = \mathscr{I}(I \cup \{b^\alpha_\gamma : \gamma < \lambda\})$. $\dashv$

Korollar 8.2. *Wenn I ein Ideal auf a, $\prod a/I$ λ-gerichtet und D ein von I disjunkter Ultrafilter auf a mit* $\mathrm{cf}\,(\prod a/D) = \lambda$ *ist, dann gibt es ein $b \in D$, so dass* $\mathrm{tcf}\,(\prod b/I) = \lambda$.

Beweis Sei $\langle f_\alpha/D : \alpha \in \lambda\rangle$ eine aufsteigende Folge, die konfinal in $\prod a/D$ ist.

Behauptung. *Wir können annehmen, dass $\langle f_\alpha/I : \alpha \in \lambda\rangle$ aufsteigend in $\prod a/I$ ist.*

Beweis Sei $f'_0 = f_0$.

Für $\alpha \in \lambda$, falls f'_β für alle $\beta < \alpha$ schon definiert ist, wähle f'_α, so dass $f'_\alpha >_I f'_\beta$ für alle $\beta < \alpha$ und $f'_\alpha >_I f_\alpha$. (Dies ist möglich, da $\prod a/I$ $<\lambda$-gerichtet ist.)

Es ist noch zu zeigen, dass $\langle f'_\alpha/D : \alpha \in \lambda\rangle$ immer noch aufsteigend und konfinal in $\prod a/D$ ist. Hierfür bemerke, dass für $f, g \in \prod a$ gilt $f <_I g \Rightarrow f <_D g$ (*), denn

$$\begin{aligned} f <_I g &\Rightarrow \{i \in a : f(i) \geq g(i)\} \in I \\ &\Rightarrow \{i \in a : f(i) \geq g(i)\} \notin D \quad (I \cap D = \emptyset) \\ &\Rightarrow \{i \in a : f(i) < g(i)\} \in D \quad (D \text{ ultra}) \\ &\Rightarrow f <_D g \end{aligned}$$

Nun ist $\langle f'_\alpha/D : \alpha \in \lambda\rangle$ konfinal, denn $\langle f_\alpha : \alpha \in \lambda\rangle$ ist konfinal (in $\prod a/D$) und $f_\alpha <_I f'_\alpha$, also $f_\alpha <_D f'_\alpha$.

Ähnlich folgt „aufsteigend", denn falls $\alpha < \beta$ gilt $f'_\alpha <_I f'_\beta \Rightarrow f'_\alpha <_D f'_\beta$. ⊣

Beachte, dass $\langle f'_\alpha/I : \alpha \in \lambda\rangle$ in $\prod a/I$ unbeschränkt ist. (Falls es eine Schranke über I gäbe, wäre es genauso ein Schranke über D, aber diese Folge ist konfinal über D.) Von nun an ersetze die f_α durch f'_α.

Nach dem Satz der künstlichen oberen Schranke (8.1) finden wir Teilmengen $\langle b_\beta : \beta \in \lambda\rangle$ von a, so dass für jedes $\beta \in \lambda$ $\langle (f_\alpha \restriction b_\beta)/I : \alpha \in \lambda\rangle$ konfinal in $\prod b_\beta/I$ ist (und daher $\mathrm{tcf}\,(\prod b_\beta/I) = \lambda$) und $\langle f_\alpha : \alpha \in \lambda\rangle$ ist beschränkt modulo dem (möglicherweise unechten) Ideal $I^* = \mathscr{I}(I \cup \{b_\beta : \beta \in \lambda\})$. Wegen diesem Fakt gilt $I^* \cap D = \emptyset$ nicht, denn dann wäre $\langle f_\alpha/D : \alpha \in \lambda\rangle$ beschränkt in $\prod a/D$ wegen (*).

Also wähle $B' \in I^* \cap D \neq \emptyset$, und die Elemente von I^* sind Teilmengen von Mengen der Form $B \cup \bigcup_{i\in n} b_{\beta_i}$, wobei $B \in I$, $\beta_i \in \lambda$. Also ist $B' = B \cup \bigcup_{i\in n} b_{\beta_i}$ und in D, daher ist auch $B \cup \bigcup_{i\in n} b_{\beta_i}$ in D. Da D ein Ultrafilter ist, ist $B \in D$ oder mindestens eines der $b_{\beta_i} \in D$, dies ist das gesuchte b. ⊣

Korollar 8.3. *Sei I ein Ideal auf a, so dass wir für jeden von I disjunkten Ultrafilter D auf a* $\mathrm{cf}\,(\prod a/D) = \lambda$ *haben. Dann gilt* $\mathrm{tcf}\,(\prod a/I) = \lambda$.

Beweis Zuerst bemerke $J_{<\lambda}(a) \subseteq I$. Falls nicht, nehme $b \in J_{<\lambda}(a) \setminus I$ und einen Ultrafilter D, der disjunkt von I ist, so dass $b \in D$. Aber dann gilt $\mathrm{cf}\,(\prod a/D) < \lambda$ nach Definition von $J_{<\lambda}(a)$.

Definiere nun $I^* = \{b \subseteq a : b \in I \vee \mathrm{tcf}\,(\prod b/I) = \lambda\}$. Beachte, dass dies wieder (ein möglicherweise unechtes) Ideal ist. Beweis[Beweisskizze, dass dies ein Ideal ist]

(1) $b, b' \in I \Rightarrow b \cup b' \in I \Rightarrow b \cup b' \in I^*$

(2) $b \in I$, $\operatorname{tcf}(\prod b'/I) = \lambda$; Behauptung: $\operatorname{tcf}(\prod b \cup b'/I) = \lambda$.

Nehme einen Zeugen $\langle f_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ von $\operatorname{tcf}(\prod b'/I) = \lambda$. Dann definiere $f'_\alpha(i) := \begin{cases} f_\alpha(i) & i \in b' \\ 0 & i \in b \setminus b' \end{cases}$. Dann bezeugt $\langle f'_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$, dass $\operatorname{tcf}\left(\prod b \cup b'_{/I}\right) = \lambda$, denn für ein $g \in \prod b \cup b'/I$, kann ein $\alpha \in \lambda$ gefunden werden, so dass $g \restriction b' <_I f_\alpha$.

Die Behauptung $g <_I f$ wird bewiesen durch

$$\{i \in b \cup b' : g(i) \geq f'_\alpha(i)\} \subseteq \underbrace{b}_{\in I} \cup \underbrace{\{i \in b' : g(i) \geq f_\alpha(i)\}}_{\in I}$$

(3) Wenn $\operatorname{tcf}\left(\prod b_{/I}\right) = \lambda = \operatorname{tcf}(\prod b'/I)$, dann ist $\operatorname{tcf}(\prod b \cup b'/I) = \lambda$.

$\dashv$

Nehme Zeugen $\langle f_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$, $\langle f'_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$.

Behauptung.

$$f''_\alpha(i) := \begin{cases} \max(f_\alpha(i), f'_\alpha(i)) & i \in b \cap b' \\ f_\alpha(i) & i \in b \setminus b' \\ f'_\alpha(i) & i \in b' \setminus b \end{cases}$$

ist ein Zeuge, dass $\operatorname{tcf}(\prod b \cup b'/I) = \lambda$.

Beweis Übungsaufgabe $\dashv$

Behauptung. $I^* = \mathscr{P}(a)$

Beweis Denn angenommen I^* wäre echt, dann können wir einen von I^* disjunkten Ultrafilter finden und daher ist er disjunkt von I, weshalb nach Voraussetzung des Korollars $\operatorname{cf}(\prod a/D) = \lambda$ gilt. Nach Korollar 8.2 gibt es ein $b \in D$ mit $\operatorname{tcf}(\prod b/I) = \lambda$, deshalb ist $b \in I^*$, somit $D \cap I^* \neq \emptyset$, ein Widerspruch. $\dashv$

Also ist I^* nicht echt, daher gilt insbesondere $a \in I^*$, damit gilt $\operatorname{tcf}\left(\prod a_{/I}\right) = \lambda$. $\dashv$

Korollar 8.4. *Sei* $b \in J_{\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a)$, *dann gilt* $\operatorname{tcf}\left(\prod b_{/J_{<\lambda}(a)}\right) = \lambda$.

Beweis Nehme das Ideal $I := \mathscr{I}(J_{<\lambda}(a) \cup \{a \setminus b\})$, nehme einen von I disjunkten Ultrafilter D, was möglich ist, da I echt ist, denn $b \notin I$.

Bemerke zuerst, dass $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$, also ist $\operatorname{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Ferner, da $a \setminus b \in I$, $a \setminus b \notin D$ und D ein Ultrafilter ist, ist $b \in D$, also da $b \in J_{<\lambda^+}(a)$, ist $\operatorname{cf}(\prod a/D) < \lambda^+$. Daher gilt $\operatorname{cf}(\prod a/D) = \lambda$, also ist nach Korollar 8.3 $\operatorname{tcf}(\prod a/I) = \lambda$.

Behauptung. $\operatorname{tcf}\left(\prod b_{/J_{<\lambda}(a)}\right) = \lambda$

Beweis[Beweisskizze]

$$\begin{aligned}\lambda &= \operatorname{tcf}\left(\prod a/I\right) \quad (\text{da } a \setminus b \in I)\\ &= \operatorname{tcf}\left(\prod b/I\right) \quad (\text{da } I = \mathscr{I}(J_{<\lambda}(a) \cup \{a \setminus b\})\\ &= \operatorname{tcf}\left(\prod b_{/J_{<\lambda}(a)}\right) \quad (\text{da } I \restriction b = J_{<\lambda}(a) \text{ gilt})\end{aligned}$$

⊣

⊣

Satz 8.5 (vom Generator)**.** *Ausgehend von* $\min(a) > 2^{|a|}$ *gibt es für jedes* $\lambda \in \operatorname{pcf}(a)$ *einen sogenannten Generator* $b_\lambda \subseteq a$*, so dass* $J_{<\lambda^+}(a) = J_{<\lambda}(a) + b_\lambda = \{c \subseteq a : \exists d \in J_{<\lambda}(a).\ c \subseteq d \cup b_\lambda\}$

Bemerkung 8.6. *Die Voraussetzung* $\min(a) > |a|^+$ *genügt für die Existenz der Generatoren. Doch der schärfere Satz hat einen wesentlich längeren Beweis.*

Lemma 8.7 (über die $<\lambda$-Abgeschlossenheit von $J_{<\lambda^+}(a)$ modulo $\subseteq_{J_{<\lambda}(a)}$)**.** *Für alle* $\{b_\alpha : \alpha < \mu\}$*,* $\mu < \lambda$ *mit* $b_\alpha \in J_{\lambda^+}(a)$ *gibt es ein* $b \in J_{\lambda^+}(a)$*, so dass* $\forall \alpha < \mu.\ b_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(a)} b$*.*

Beweis Wir nehmen an, dass $\forall \alpha.\ b_\alpha \in J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a)$. (Falls $b_\alpha \in J_{<\lambda}(a)$, dann $b_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(a)} \emptyset$).

Nach Korollar 8.4 ist $\operatorname{tcf}\left(b_{\alpha/J_{<\lambda}(a)}\right) = \lambda$ für alle $\alpha < \mu$. Für $\alpha < \mu$ nehmen wir eine bezeugende Folge $\overline{f}^\alpha = \langle \left(f^\alpha_\rho \restriction b_\alpha\right)_{/J_{<\lambda}(a)} : \rho < \lambda\rangle$ konfinal in $\prod b_{\alpha/J_{<\lambda}(a)}$.

Induktiv über $\rho < \lambda$ wählen wir f^*_ρ, so dass

$$\{f^\alpha_\rho : \alpha < \mu\} \cup \{f^*_{\rho'} : \rho' < \rho\} \leq_{J_{<\lambda}(a)} f^*_\rho.$$

$\overline{f}^\alpha$ ist konfinal auf $\prod b_{\alpha/J_{<\lambda}(a)}$, daher ist $\overline{f}^*$ unbeschränkt auf $\prod a_{/J_{<\lambda}(a)}$.

Nach dem Satz von der künstlichen oberen Schranke (8.1) angewandt auf $I = J_{<\lambda}(a)$, $\langle f^*_\rho : \rho < \lambda\rangle$ gibt es eine Folge $\langle c_\gamma : \gamma < \lambda\rangle$, $c_\gamma \subseteq a$, so dass (3) und (4) aus dem Satz gelten:

$$\forall \gamma < \lambda.\ \langle (f^*_\rho \restriction c_\gamma)_{/J_{<\lambda}(a)} : \rho < \lambda\rangle \text{ ist konfinal in } \prod c_{\gamma/J_{<\lambda}(a)}$$

und

$$\text{es gibt ein } g \in \prod a_{/J_{<\lambda}(a)} \text{ so dass } \forall \rho < \lambda.\ g \geq_J f_\rho \text{ und}$$
$$J = \mathscr{I}(I \cup \{c_\gamma : \gamma < \lambda\}) = \{c \subseteq a : \exists n \exists \gamma_1, \dots \gamma_n \exists b \in I.\ c \subseteq b \cup c_{\gamma_1} \cup \dots c_{\gamma_n}\}.$$

Zwischenbehauptung. $\forall \alpha < \mu \exists \gamma < \lambda.\ b_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(a)} c_\gamma$.

Beweis Im ersten Fall sei J echt, also existiert kein $k \in \mathbb{N}$ und keine $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ mit $\bigcup_{1 \leq i \leq k} c_{j_k} \supseteq a$.

Widersprüchlich zur Behauptung sei angenommen, dass für ein festes α gilt $\forall \gamma < \lambda.\ b_\alpha \setminus c_\gamma \notin J_{<\lambda}(a)$ und somit gibt es einen Ultrafilter D auf a mit $\forall \gamma < \lambda.\ b_\alpha \setminus c_\gamma \in D$.

$\{b_\alpha \setminus \gamma : \gamma < \lambda\}$ hat die endliche Durchschnitt-Eigenschaft, wenn für alle $n \in \omega$

$$\forall \gamma_1, \ldots \gamma_n < \lambda. \quad \underbrace{(b_\alpha \setminus c_{\gamma_1}) \cap \ldots \cap (b_\alpha \setminus c_{\gamma_n})}_{=b\setminus(\underbrace{c_{\gamma_1} \cup \ldots \cup c_{\gamma_n}}_{\in J})\neq\emptyset,\text{ da } J \text{ echt}} \neq \emptyset.$$

Nach dem Ultrafiltertheorem 2.10 gibt es einen Ultrafilter $D \supseteq \{b_\alpha \setminus c_\gamma : \gamma < \lambda\}$. Es gilt $f^\alpha_\rho \leq_{J_{<\lambda}(a)} f^*_\rho$ und daher ist f^*_ρ/D unbeschränkt in $\prod a/D$ und konfinal in $\prod b_\alpha/D$. Andererseits gibt es nach (4) eine obere Schranke g/D für $\langle f^*_\rho/D : \rho \subset D\rangle$, ein Widerspruch.

Im zweiten Fall ist nichts zu zeigen ⊣

Wir haben $\forall \alpha < \mu \exists \gamma < \lambda.\ b_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(a)} c_\gamma$. Mit $\mu < \lambda$, $c_\gamma \subseteq_{J_{<\lambda}(a)} c_\delta$ für $\gamma < \delta < \lambda$ nach 2) des Satzes von der künstlichen oberen Schranke (8.1). Da $\mathrm{cf}(\lambda) > \mu$, gilt $\exists \gamma^* \forall \alpha < \mu.\ b_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(a)} c_{\gamma^*}$. ⊣

Beweis[Beweis des Satzes vom Generator (8.5)] Wir haben $\lambda \geq \min(a) > 2^{|a|} \geq |J_{<\lambda^+}(a)| =: \mu$. $J_{<\lambda^+}(a)$ ist nach Lemma 8.7 $<\lambda^+$-gerichtet und $\mu < \lambda^+$.

$$\exists c \in J_{<\lambda^+}(a) \forall b \in J_{<\lambda^+}(a).\ \big(b \subseteq_{J_{<\lambda}(a)} c \wedge J_{\lambda^+}(a) = J_\lambda(a) + c\big)$$

So ein c wird oft als b_λ bezeichnet. ⊣

Korollar 8.8. $J_{<\lambda^+}(a) = J_{<\lambda}(a) + b_\lambda$

Falls $\lambda \notin \mathrm{pcf}(a)$, kann man $b_\lambda = \emptyset$ nehmen, dann heißt $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ $J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a) \neq \emptyset$.

Korollar 8.9. *$a' \leq a$. Dann sind die $b_\lambda \cap a'$ Erzeuger für $J_{<\lambda^+}(a') = J_{<\lambda}(a') + (b_\lambda \cap a')$.*

Beweis

$$\begin{aligned} J_{<\lambda^+}(a') &\overset{\text{Def.}}{=} \{c \subseteq a' : \text{ F.a. Ultrafilter } D \text{ auf } a' \text{ gilt } (c \in D \to \mathrm{cf}\Big(\prod a'/D\Big) < \lambda^+)\} \\ &= \{c \cap a' : c \in J_{<\lambda^+}(a)\} \end{aligned}$$

⊣

Korollar 8.10. $\mathrm{cf}\,(\prod a/D) = \min\{\lambda : b_\lambda \in D\}$.

Beweis

„$\geq$ “: Sei $b_\lambda \in D$. Aus $b_\lambda \in J_{<\lambda^+}(a)$ folgt $\mathrm{cf}\,(\prod a/D) \leq \lambda$.

„$\leq$ “: Sei $\mathrm{cf}\,(\prod a/D) < \mu^+$, dann $\exists b \in D.\ b \in J_{<\mu^+}(a)$, daher $b \subseteq_{J_{<\mu}(a)} b_\mu$, da $b_\mu$das Ideal $J_{<\mu^+}(a)$ erzeugt über $J_{<\mu}(a)$. Es gilt $b_{\mu^+} \in D$.

⊣

Lemma 8.11 (über die endliche Überdeckung)**.**

$$\forall c \subseteq a \exists n \exists \lambda_1 \dots \exists \lambda_n \in \operatorname{pcf}(a).\ c \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} b_{\lambda_i}$$

Beweis $J_c := \mathscr{I}(\{b_\lambda \cap c : \lambda \in \operatorname{pcf}(a)\})$ ist ein Ideal auf c. Es wird angenommen, dass J_c echt ist, also $c \notin J_c$, ansonsten wäre der Beweis schon fertig.

Nach dem Ultrafiltertheorem 2.10 gibt es einen Ultrafilter D auf c, so dass $D \cap J_c = \emptyset$. Es gilt

I echt $\Leftrightarrow I^* = \{c \setminus x : x \in I\}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft.

Es ist $\operatorname{cf}\left(\prod a_{/D}\right) = \lambda$ für irgendein $\lambda \in \operatorname{pcf}(a)$. Damit gilt auch $\operatorname{cf}\left(\prod c_{/D}\right) = \operatorname{cf}\left(\prod a_{/D}\right) = \lambda$, also folgt aus der Definition von c , dass $D \cap J_{<\lambda^+}(c) \neq \emptyset$. Somit folgt aus Korollar 8.10 die Inklusion $b_\lambda \in D$, daher $b_\lambda \cap c \in D$ und damit $b_\lambda \cap c \notin J_c$, ein Widerspruch. $\dashv$

8.1 Übungen

Übung 8.1. Ein Beispiel für eine künstliche obere Schranke: Sei $S_n = \omega$ für alle $n \in \omega$, und für $k \in \omega$ sei $f_k \in \prod_{n \in \omega} S_n$ die konstante Funktion $f_k(l) := k$ für $l \in \omega$. Sei $I := \{\emptyset\}$.

1. Ist $\langle f_k : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n \in \omega} S_n / I$?

   Wir setzen $b_r := \{0, \dots, r\}$ für $r \in \omega$.

2. Ist $\langle f_k \upharpoonright b_r : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n \in b_r} S_n / I$?

   Definition: Eine Menge F erzeugt ein Ideal I, g.d.w

$$I = \{a : \exists n \in \omega \exists f_1, \dots, f_n \in F(a \subseteq \bigcup f_i)\}.$$

Wir schreiben dafür $I = \mathscr{I}(F)$. Überlegen Sie sich, dass I tatsächlich ein Ideal ist.

3. Sei $J := \langle \{b_r : r \in \omega\} \rangle$. Ist $J = \mathrm{FIN} := \{a \subseteq \omega : |a| < \omega\}$?
4. Ist $\langle f_k : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n \in \omega} S_n / J$?
5. Sei $J' \supseteq J$ ein weiteres Ideal. Ist $\langle f_k : k \in \omega \rangle$ beschränkt in $\prod_{n \in \omega} S_n / J'$?
6. Für jedes $i \in \omega$ sei $a_i \subseteq \omega$, a_i unendlich, so dass $a_i \supseteq a_j$ falls $i < j$. Gibt es ein unendliches $a \subseteq \omega_1$, so dass $\forall i \in \omega$, $a \subseteq_{\mathrm{FIN}} a_i$? (Wie in der Vorlesung schreiben wir $a \subseteq_{\mathrm{FIN}} b$ g.d.w. $(a \setminus b) \in \mathrm{FIN}$).
7. Gibt es ein Ideal auf ω_1, das nicht durch eine aufsteigende Folge erzeugt wird?
8. Ein lustiges Ideal auf $2^{<\omega}$: Für $s \in 2^\omega$, sei $b_s := \{t \in 2^{<\omega} : t \subseteq s\}$. Definieren wir ein Ideal $I := \mathscr{I}(\{b_s : s \in 2^\omega\})$. Ist I durch eine aufsteigende Folge erzeugt?

Kapitel 9

Abschätzen der kardinalen Exponentiation

Zitat 9.1 (Gitik, Magidor 1992 [4])**.** *Sei α eine Nachfolgerordinalzahl, $\alpha \in (\omega, \omega_1)$. Angenommen es gibt ein κ mit $o(\kappa) = \kappa^{+\alpha+1}$, dann gibt es ein Forcing, so dass in der generischen Erweiterung $\forall n.\ 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} \wedge 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\alpha+1}$.*

Bemerkung 9.2. *Vermutet wird, dass aus $\forall n.\ 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ folgt, dass $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_1}$. Dies würde aus der pcf-Vermutung folgen. Bekannt ist $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \Rightarrow 2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$, siehe Satz 10.1.*

In diesem Kapitel zeigen wir $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \Rightarrow \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ in Korollar 9.5.

Satz 9.3 (über $\max \mathrm{pcf}(a)$)**.** *Sei $a = [\min(a), \sup(a))$ ein Intervall in den regulären Kardinalzahlen und sei $\min(a)^{|a|} < \sup(a)$.*

Dann ist $\prod a = \max \mathrm{pcf}(a)$.

Bemerkung 9.4. *Der Satz gilt auch für endliches a, denn ist a eine endliche Menge von regulären unendlichen Kardinalzahl, ist $\mathrm{pcf}(a) = a$ und $\sup(\mathrm{pcf}(a)) = \max(a) = |\prod a|$.*

Korollar 9.5. *Falls $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, so ist $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$.*

Beweis[Beweis des Korollars]

- 1. Fall: $2^{\aleph_0} \geq \aleph_\omega$: Dann ist $\aleph_\omega^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$

- 2. Fall: $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$: Sei $2^{\aleph_0} = \aleph_\kappa$. Wir nehmen $a = \{\aleph_n : n \geq k\}$. Dann ist und $\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \prod_{n\in[k,\omega)} \aleph_n$ und auch $\max(\mathrm{pcf}(a)) = \max(\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$. Nun ist

  $$\min(a)^{|a|} = \aleph_k^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = \aleph_k < \aleph_\omega = \sup(a).$$

  Nach dem Satz 9.3 ist $\prod_{n\geq k} \aleph_n = \max \mathrm{pcf}(a)$. Es gilt $\prod_{n\geq 1} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0} = |\{f \mid f : \aleph_0 \to \aleph_\omega\}|$.

  $\mathrm{pcf}(a) \leq 2^{|a|} = 2^{\aleph_0}$ gilt nach Korollar 4.13. Nach dem Satz vom Intervall (5.2) ist $\max \mathrm{pcf}(a) < \aleph_{\omega+\|\mathrm{pcf}(a)\|^+}$. Wir setzen ein und erhalten $\prod_{n\geq k} \alpha_n < \aleph_{\omega+(2^{\aleph_0})^+}$. Dies gilt auch für $a' = \{\aleph_n : n \in \omega\}$.

$\dashv$

Lemma 9.6. *Wenn wir den Satz 9.3 unter der zusätzlichen Voraussetzung* $2^{|a|} < \min(a)$ *bewiesen haben, dann folgt schon der Satz.*

Beweis Definiere $a_0 = [\min(a), \min(a)^{|a|}]$ und $a_1 = (\min(a)^{|a|}, \sup(a)] = [(\min(a)^{|a|})^+, \sup(a)]$.

a_1 erfüllt die verschärfte Voraussetzung, da $2^{|a_1|} \leq 2^{|a|} < (\min(a)^{|a|})^+ = \min(a_1)$. Wir nehmen also an, dass der Satz für a_1 gilt.

$$\prod a = \prod (a_0 \cup a_1) = \prod a_0 \cdot \prod a_1 \overset{\text{Hessenberg}}{=} \prod a_1.$$

Wir haben nun

$$\min(a_1)^{|a_1|} = \min(a_1) \cdot \left(\min(a)^{|a|}\right)^{|a_1|} =$$

$$\min(a_1) \cdot \underbrace{(\min(a))^{|a|}}_{\leq \min(a_1)} = \min(a_1) = \left(\min(a)^{|a|}\right)^+ < \sup(a) = \sup(a_1)$$

Der Satz 9.3 für a_1 liefert $\prod a_1 \leq \max \operatorname{pcf}(a_1)$.

$$\max \operatorname{pcf}(a) \leq \prod a = \prod a_1 \overset{\text{verschärfte Vor.}}{\leq} \max \operatorname{pcf}(a_1) \leq \max \operatorname{pcf}(a)$$

$\dashv$

Wir beweisen nun Satz 9.3 unter der zusätzlichen Voraussetzung $2^{|a|} < \min(a)$.

Definition 9.7 (sonnig)**.** $N \prec H(\theta)$, wobei θ regulär und groß genug ist, heißt *sonnig für a*, wenn

1) $|N| = \min(a)$
2) $a \in N, \min(a) \subseteq N$
3) N ist *von innen approximiert von der Länge* $|a|^+$, das heißt es gibt $\langle N_i : i < |a|^+ \rangle$, $N_{i<|a|^+} = \bigcup N_i$ und für jedes δ ist $N_\delta = \bigcup_{i<\delta} N_i$ und $\langle N_i : i \leq j \rangle \in N_{j+1}$ für $j < |a|^+$, wobei $N_i \prec H(\theta)$ für $i < |a|^+$.
4) Für alle i gilt $N_i \subseteq N_{i+1}$.

Bemerkung 9.8. $\langle N_i : i < |a|^+ \rangle \notin N$*, denn sonst wäre* $\langle N_i : i < |a|^+ \rangle \in N_j$ *für ein* j*, ein Widerspruch.*

Bemerkung 9.9. *Existiert eine Menge die die ersten 3 Eigenschaften der Sonnigkeit erfüllt, so auch ohne Einschränkung die vierte, ansonsten kann man über die Folge der* N_i *vereinigen .*

Lemma 9.10. *Sei a progressiv.*

$$\forall x \in H(\theta) \exists N \prec H(\theta).\ (N \text{ sonnig für } a \wedge a \in N)$$

Beweis Induktiv über $i < |a|^+$ wählen wir Strukturen N_i:

- $a \in N_0$, $\min(a) \subseteq N_0$, $x \in N_0$, $|N_0| = \min(a)$, $N_0 \prec H(\theta)$. Löwenheim-Skolem abwärts auf die Menge $\min(a) \cup \{a, x\} \subseteq H(\theta)$, Sprache $\{\in, <_*\}$.
- Nachfolgerschritt $j \mapsto j+1$: Löwenheim-Skolem abwärts auf die Teilmenge $N_j \cup \{\langle N_i : i \leq j\rangle\}$ von $H(\theta)$ in der Struktur $(H(\theta), \in, <_*)$.
- Limesschritt:

  Behauptung. *Sei für $i < \theta$ $N_i \prec H(\theta)$ und sei $N_i \subseteq N_j$ für $i < j < \delta$, δ Limes, dann gilt $\bigcup_{i<\delta} N_i \prec H(\theta)$.*

  Beweis Wir benutzen den Tarski-Test (siehe zum Beispiel [14, 2.1.2], der sagt, dass man die Elemetarität einer Substruktur alleine mit Existenzformeln mit quatorenfreiem Kern prüfen kann. Sei $\phi(x_0, \dots, x_n)$ gegeben mit $H(\theta) \models \exists x_n \phi$, ϕ quantorenfrei, $x_0, \dots, x_{n-1} \in N_i$. $N_i \models \exists x_n \phi$, da $N_i \prec H(\theta)$. ⊣

Wir setzen nun $N = \bigcup_{i<|a|^+} N_i$. ⊣

Das folgende Lemma wir enorm oft benutzt.

Lemma 9.11. *(Lemma über die teilweise Transitivität elementarer Substrukturen) Sei $X \in N$, $N \prec H(\theta, \in)$ und $|X| \subseteq N$. Dann ist $X \subseteq N$.*

Beweis $H(\theta) \models \exists f f \colon |X| \overset{\text{auf}}{\to} X$. Dann erfüllt auch N diesen Satz, und wir halten ein $f \in N$ fest mit dieser Eigenschaft. Wir gehen mit $\prec$ wieder nach oben und erhalten $H(\theta) \models f \colon |X| \overset{\text{auf}}{\to} X$ Sei nun $x \in X$. Dann ist $x = f(\alpha)$ für ein α (in $H(\theta)$). Aus der Voraussetzung $|X| \subseteq N$ erhalten wir $\alpha \in N$. Da $f \in N$, ist also auch $f(\alpha) \in N$. ⊣

Wir wenden das Lemma an auf $X = \mathrm{pcf}(a)$:

Beobachtung. $2^{|a|} < \min(a) \subseteq N$ *garantiert, dass* $\mathrm{pcf}(a) \subseteq N$.

Beweis $a \in N \Rightarrow \mathrm{pcf}(a) \in N$ und $|\mathrm{pcf}(a)| \leq 2^{|a|} \leq \min(a) \leq N$, $|N| = \min(a)$, $\min(a) \subseteq N$, denn aus $X \in N$, $N \prec H(\theta)$ und $|X| \subseteq N$ folgt nach dem Lemma eben $X \subseteq N$. ⊣
Die eine Ungleichung des Satzes über $\max \mathrm{pcf}(a)$ (9.3) ist einfach: $\max(\mathrm{pcf}(a)) \leq |\prod a|$, da jedes Element $\lambda = \mathrm{cf}(\prod a/D) \in \mathrm{pcf}(a)$ abgeschätz wird durch $\mathrm{cf}(\prod a/D) \leq |\prod a/D| \leq |\prod a|$.
Nun kommen wir zur Ungleichung

$$\max(\mathrm{pcf}(a)) \geq |\prod a|.$$

Kernbehauptung.

$$|\mathrm{pcf}(a)| \leq 2^{|a|} < \min(a) \Rightarrow |\{N \cap \sup(a) : N \text{ sonnig}\}| \leq \kappa := |\prod a|.$$

Beweis[Beweis der interessanten Ungleichung im Satz über $\max \mathrm{pcf}(a)$ (9.3) unter Annahme der Kernbehauptung]
Sei $f \in \prod a$. Wir nehmen ein sonniges N, so dass $f \in N$. Da $|f| = |a|$, ist $f \subseteq N$. Es gilt $f \subseteq N \cap (a \times \sup(a)) = a \times (N \cap \sup(a))$. Also ist $f \in (N \cap \sup(a))^{|a|}$.

Für f gibt es $|N \cap \sup(a)|^{|a|} \leq |\min(a)|^{|a|} < \sup(a) \leq \kappa$ viele Möglichkeiten. Für jedes sonnige N gibt es $\leq \kappa$ viele $f \in \prod a \cap N$. ⊣

Beweis[Beweis der Kernbehauptung]
$|\{N \cap \sup(a) : N \text{ sonnig}\}| \leq \kappa$ und daher $\prod a \subseteq \{{}^a N \cap \sup(a) : N \text{ sonnig}\} \leq \kappa \cdot \kappa$. ⊣

Definition 9.12. Die Funktion $\chi_N \colon \{\text{reguläre Kardinalzahlen}\} \to \mathbf{On}$ mit $\chi_N(\eta) := \sup(N \cap \eta)$ für $\eta \in a$ heißt die *charakteristische Funktion von N.*

Lemma 9.13. *1. χ_N bestimmt $N \cap \sup(a)$.*

2. $|\{\chi_N : N \text{ sonnig}\}| \leq \kappa$.

Beweis[Beweis von 1.] Wir zeigen: N und N' sonnig und $\chi_N = \chi_{N'} \Rightarrow N' \cap \sup(a) = N \cap \sup(a)$: Aus $2^{|a|} < \min(a)$ folgt $|a|^+ \leq \min(a)$. Wir haben $N = \bigcup_{i \in |a|^+} N_i$. Induktiv über $\eta \in \mathrm{Card} \cap [\min(a), \sup(a)]$ zeigen wir, dass $\chi \restriction \eta + 1$ zusammen mit $N \cap \delta$, $\delta < \eta$, die Menge $N \cap \eta$ bestimmt.

- Induktionsanfang: $\chi_N(\min(a)) = N \cap \min(a) = \min(a) = N' \cap \min(a)$
- Limesschritt: Sei $\eta = \lim_{i < \mathrm{cf}(\eta)} \eta_i$ und $\chi_N \restriction \eta + 1$ bestimmt durch $N \cap \eta$. Es ist $\chi_N \restriction \eta_i + 1$ bestimmt durch $N \cap \eta_i$ für $i < \mathrm{cf}(\eta)$. Wir haben $N \cap \eta = \bigcup_{i < \mathrm{cf}(\eta)} N \cap \eta_i$.
- Nachfolgerschritt: Die Induktionsvoraussetzung wurde also für η gezeigt und wird davon ausgehend für η^+ bewiesen. Zu zeigen:

  $$N \cap \eta = N' \cap \eta \text{ und } \sup(N \cap \eta^+) = \sup(N' \cap \eta^+) \Rightarrow N \cap \eta^+ = N' \cap \eta^+$$

  Es gilt $\eta^+ \in N \cap N^+$, denn $a \in N$ und $a \subseteq N$.

  Setze $E_N := \{\sup(N_i \cap \eta^+) : i < |a|^+\}$. $E_N \subseteq N$ und E_N ist club, denn $N_i \in N$, $\eta^+ \in N \Rightarrow (\sup(N_i \cap \eta))^N \in N$ und $(\sup(N_i \cap \eta))^{\mathbf{V}} \in N$. Sei

  $$\sup\left(\bigcup_{i<\delta} N_i \cap \eta^+\right) = \sup_{i<\delta}(N_i \cap \eta^+).$$

  Wir haben $E_{N'}$ club, $E_N \cap E_{N'} \subseteq N \cap N'$ club in $\sup(N \cap \eta^+) = \sup(N' \cap \eta^+)$. Sei $\alpha \in N \cap N' \cap (E_N \cap E_{N'}) \cap (\eta^+ \setminus \eta)$, was existiert wegen $a \subseteq N$. Definiere: $f \in N \cap N'$ sei die $<_*$-kleinste Bijektion $f_\alpha : \eta \to \alpha$. Wir haben

  $$N \cap \eta^+ = \bigcup_{\alpha \in N \cap N' \cap (\eta^+ \setminus \eta)} N \cap \alpha = \bigcup_{\alpha \in N \cap N' \cap (\eta^+ \setminus \eta)} f''_\alpha = N' \cap \eta^+.$$

⊣

Beweis[Beweis von 2.] Wir werden für jedes χ_N, N sonnig, einen Namen niederschreiben. Die Namen stammen aus der Menge $[\mathrm{pcf}(a)]^{<\omega}$. Wir haben $|[\mathrm{pcf}(a)]^{<\omega}| = |\mathrm{pcf}(a)| = \kappa$. Hierbei kommt das erste „=" aus der Unendlichkeit von $\mathrm{pcf}(a)$, welche aus der Unendlichkeit von a folgt.

Wir erinnern an eine alte Tatsache über Ultrafilter D über a und Erzeugende b_λ von $J_{<\lambda^+}(a)$, Korollar 8.10. Dies sagt: $\mathrm{cf}\left(\prod a/D\right) = \min\{\lambda : b_\lambda \in D\}$, also

$$((b_\lambda \in D \wedge (\forall \mu < \lambda) b_\mu \notin D) \to \lambda \leq \prod a/D < \lambda^+).$$

Dies schließt man aus $\mathrm{tcf}\left(\prod b_{\lambda/J_{<\lambda}(a)}\right) = \lambda$.

Noch eine Bemerkung: θ sei so groß, dass für die endlich vielen Definition φ und formalen Beweise φ die in dem Beweis vorkommen (werden), gilt:

$$H(\theta) \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{V} \models \varphi.$$

Es gibt solche θ, zum Beispiel genügt $\theta > 2^{2^{|\prod a|}}$.

Ein sehr wichtiges φ ist zum Beispiel: "$\mathrm{tcf}\left(\prod b_{\lambda/J_{<\lambda}(a)}\right) = \lambda$ werde bezeugt durch $\langle g_i^\lambda : i < \lambda\rangle$."

Nun kehren wir zum eigentlichen beweis der Kernbehauptung zurück:

Sei $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$, es gilt $J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a) \neq \emptyset$. Sei $b_\lambda \in J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a)$. Dann ist $\mathrm{tcf}\left(\prod b_{/J_{<\lambda}(a)}\right) = \lambda$. Es gibt $\langle g_i^\lambda : i < \lambda\rangle$, so dass $g_i^\lambda <_{J_{<\lambda}(a)} g_j^\lambda$ für $i < j < \lambda$ und $\forall g \in \prod a \exists i.\ g \leq_{J_{<\lambda}(a)} g_i^\lambda$. Wir haben $\langle g_i^\lambda : i < \lambda\rangle \in H(\theta)$.

Wir vergrößern induktiv über $i < \lambda$ die Folge $\langle g_i^\lambda : i < \lambda\rangle$. Die Vergrößerung heißt $\langle f_i^\lambda : i < \lambda\rangle$. Induktionsschritt:

- 1. Fall: $\mathrm{cf}(i) \neq |a|^+$. Wir nehmen $f_i^\lambda(\beta)$, so dass $f_i^\lambda \geq_{J_{<\lambda}(a)} g_i^\lambda$.
- 2. Fall: $\mathrm{cf}(i) = |a|^+$. Für $\beta \in a$ definiere

$$f_i^\lambda(\beta) = \min\{\sup\{f_j^\lambda(\beta) : j \in C\} : C \subseteq i \text{ club}, \mathrm{otp}(C) \leq |a|^+\}.$$

Nehme nun festes $b_\lambda \in J_{<\lambda^+}(a) \backslash J_{<\lambda(a)}$, $<_*$-minimales Element mit $\mathrm{tcf}\left(b_{\lambda/J_{<\lambda}(a)}\right) = \lambda$.

Behauptung. $f_i^\lambda \restriction b_\lambda \geq_{J_{<\lambda}(a)} f_j^\lambda \restriction b_\lambda$ *für* $j < i$ *für* i *mit* $\mathrm{cf}(i) = |a|^+$.

Beweis[Beweisskizze] $j \in C$ und C ging in die Definition von $f_i(\beta)$ ein. ⊣

Erinnerung g_i^λ wurde induktiv vergrößert zu $\langle f_i^\lambda : i < \lambda\rangle$, so dass

$$\begin{aligned}\forall i < \lambda.\ &(\forall j < i.\ f_i^\lambda \restriction b_\lambda >_{J_{<\lambda}(a)} f_j^\lambda \restriction b_\lambda \wedge f_i^\lambda(\beta) \geq g_i^\lambda(\beta)) \\ &\wedge (\mathrm{cf}(i) = |a|^+ \to \forall \beta \in a.\ f_i^\lambda(\beta) = \min\{\sup\{f_j^\lambda(\beta) : j \in C_\beta\} : C_\beta \text{ club in } i\})\end{aligned} \tag{9.1}$$

So eine Folge f_i^λ gibt es (wie im Satz 8.1 über die kleinste obere Schranke). Sei $\langle f_i^\lambda : i < \lambda\rangle$ die $<_*$-kleinste Folge mit (9.1) in $(H(\theta), \in, <_*) \succ N \ni a, b_\lambda$, daher ist $\langle f_i^\lambda : i < \lambda\rangle \in N$ für jedes sonnige N.

Unterbehauptung. *Sei N sonnig, $\rho = \sup(N \cap \lambda)$ und $\langle f_i^\lambda : i < \lambda \rangle$ sei durch (9.1) gegeben.*

Dann gilt $f_\rho^\lambda \leq \chi_N$ und $\chi_N \restriction b_\lambda =_{J_{<\lambda}(a)} f_\rho^\lambda \restriction b_\lambda$.

Beweis Wie auf Blatt 9 10.1 ist $\mathrm{cf}(\rho) = |a|^+$ in $H(\theta)$ (und in $\mathbf{V}$). Dies wird durch die stetig aufsteigende Folge $\langle \sup(N_i \cap \rho) : i < |a|^+ \rangle$ bezeugt. Ihr Bild $\{\sup(N_i \cap \rho) : i < |a|^+\}$ ein club in $\sup(N \cap \rho)$. Nach (9.1) wissen wir:

$$\forall \beta \in a.\ f_i^\lambda(\beta) \leq \sup\{ \underbrace{f_j^\lambda(\beta)}_{\in N \cap \beta \text{ auch wg. } a \subseteq N} : j \in C\} \leq \sup(N \cap \beta) = \chi_N(\beta)$$

Sei

$$f_\theta^\lambda(\beta) < \underbrace{\gamma(\beta)}_{\in N \cap \beta} < \chi_N(\beta) = \sup(N \cap \beta) \qquad (<)$$

Es gibt ein $j < |a|^+$, so dass für alle β mit $(<)$ gilt:

$$f_\rho^\lambda(\beta) < \chi_{N_j}(\beta) < \chi_N(\beta).$$

Es gilt $\chi_N(\beta) = \sup\{\chi_{N_i}(\beta) : i < |a|^+\}$. Dann $N \models \chi_{N_j} \restriction b_\lambda \leq_{J_{<\lambda}(a)} f_{j'} \restriction b_\lambda$ für ein $j' < \lambda$, da $N \models (9.1)$, $\langle f_j^\lambda : j < \lambda \rangle$ ist konfinal in $\prod b_{\lambda / J_{<\lambda}(a)}$. Wir haben $j' \in N \cap \lambda$, daraus folgt $j' < \sup(N \cap \lambda) = \rho$. Daher ist $\chi_N \restriction b_\lambda \leq_{J_{<\lambda}(a)} f_\rho^\lambda \restriction b_\lambda$. $\dashv$

Wir wählen induktiv über $m \in \omega$ eine endliche Folge $\langle \lambda_m, \rho_m, A_m : m \leq n \rangle$, so dass

1) $\lambda_0 = \kappa = \max(\mathrm{pcf}(a)) > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$
2) $\lambda_m \in \mathrm{pcf}(a)$, $\rho_m = \sup(N \cap \lambda_m) \leq \max \mathrm{pcf}(a)$,
3) $A_0 = \{\beta \in a : f_{\rho_0}^{\lambda_0}(\beta) < \chi_N(\beta)\} \quad (\in J_{<\lambda_0}(a))$,
   $A_{m+1} = \{\beta \in A_m : f_{\rho_{m+1}}^{\lambda_{m+1}}(\beta) < \chi_N(\beta)\}$ $(\in J_{<\lambda_{m+1}}(a))$,
   $A_n = \emptyset$
4) $\lambda_{m+1} < \lambda_m$, so dass $A_m \in J_{<\lambda_m}(a) \setminus J_{<\lambda_{m+1}}(a)$.

Dann ist $\chi_N = \max\{f_{\rho_0}^{\lambda_0}, \ldots, f_{\rho_n}^{\lambda_n}\}$. Es gibt $[\max(\mathrm{pcf}(a)) \times [| \max \mathrm{pcf}(a)| \times 2^{|a|}]^{<\omega}$ viele Namen, also $\leq \kappa$ viele. $\dashv$

Kapitel 10

$|\operatorname{pcf}(a)| \leq |a|^{+3}$

Satz 10.1 (Shelah, 1988)**.** *Wenn $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, dann $\prod_{n\in\omega} \aleph_n < \aleph_{\omega_4}$ bzw. $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$.*

Satz 10.2. *Wenn a ein Intervall in den regulären Kardinalzahlen ist und* $\min(a) > 2^{|a|}$*, dann ist*

$$|\operatorname{pcf}(a)| \leq |a|^{+3}$$

Beweis [Beweis des Satzes 10.1 mit Satz 10.2]
Jede Ordinalzahl β mit $|\beta| = |a|^{+3}$ hat $\beta < |a|^{+4}$, denn $\kappa^+ = \min\{\alpha \in \mathbf{On} : |\alpha| \not\leq |\kappa|\}$.

$\dashv$

Der Beweis des Satzes 10.2 wird den Rest dieses Kapitels einnehmen. Wir teilen ihn in fünf Hauptstationen ein

a) Erhöhte Folgen

b) Einfangen von $\operatorname{pcf}(b)$ für $b \subseteq \operatorname{pcf}(a)$

c) Transitivität der Generatoren

d) Lokalisierung kleiner Produkte

e) eine unmögliche Topologie

Lemma 10.3 (über die erhöhten Folgen)**.** *Sei λ singulär,* $\operatorname{cf}(\lambda) > \omega$*. Sei $B \subseteq [\operatorname{cf}(\lambda), \lambda)$ konfinal in λ,* $\operatorname{otp}(B) = \operatorname{cf}(\lambda)$ *und B abgeschlossen. Setze $C =$* $\operatorname{acc}(B) \subseteq B$*, dann ist* $\operatorname{otp}(C) = \operatorname{cf}(\lambda)$ *und C besteht nur aus singulären Kardinalzahlen und ist abgeschlossen. (B wird nun nicht mehr benötigt.)*

Sei $n \in \omega \setminus \{0\}$. Für $A \subseteq C$ definiere $A^{+n} = \{\rho^{+n} : \rho \in A\}$. Setze $c := \bigcup_{k=1}^{\omega} c^{+k}$. Sei b_λ für $\lambda \in \operatorname{pcf}(c)$ ein Generator, also $J_{<\lambda^+}(c) = J_{<\lambda}(c) + b_\lambda$.
Dann *enthält $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\}$ einen club in λ.*

Beweis: Sei n das kleinste Gegenbeispiel. Wir definieren ein Ideal auf $C^{+n} =: a$. Für $A \subseteq a$ sei

$$A \in I \Leftrightarrow \{\rho \in C : \rho^{+n} \in A\} \text{ ist nicht stationär in } \lambda.$$

Da die Vereinigung endlich vieler nicht stationärer Mengen wieder nicht stationär ist, ist I ein Ideal. I ist ein echtes Ideal auf a, also $a \notin I$, denn $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \underbrace{C^{+n}}_{=a}\} = C$ ist club und daher (nicht nicht) stationär. Nach unserer Annahme, dass n ein Gegenbeispiel ist, enthält $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \bigcup_{k+1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\}$ keinen Club. Also ist das Komplement $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in a \setminus \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\}$ stationär in λ, also $a \setminus \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}} \notin I$. Daher ist $I^* = \mathscr{I}(I \cup \{\bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\})$ ein echtes Ideal. Nach der Definition von „Generator“ gilt $I^* \supseteq J_{<\lambda^{+n+1}}(c)$. Wir haben $J_{<\lambda^{+n+1}} = J_{<\lambda^{+n}} + b_{\lambda^{+n}}$. $\prod a/I^*$ ist $< \lambda^{+n+1}$-gerichtet, da $\prod a_{/J_{<\lambda^{+n+1}}(c)}$ $< \lambda^{+n+1}$-gerichtet ist. Wir konstruieren induktiv über α eine sehr gut aufsteigende Folge $\langle f_\alpha/I^* : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$ $<_{I^*}$-aufsteigend und konfinal in $\prod a/I^*$.

Wir nehmen eine silly square $\langle \mathscr{C} : \alpha : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$.

$g_E^\beta(\alpha) = \max\{h_\beta(\alpha), \sup\{f_\gamma(\beta) : \gamma \in E, \alpha > \operatorname{otp}(E)\}$ für $E \in \mathscr{C}_\beta$, wobei $h_\beta(\alpha)$ eine obere Schranke für $\{f_\gamma : \gamma < \beta\}$ modulo $<_{I^*}$ ist. Dies geht nach dem Lemma von der Existenz einer oberen Schranke 4.20. Wir wählen $f_{\beta/I^*} \geq_{I^*} \{g^\beta_{E/I^*} : E \in \mathscr{C}_\beta\}$ mit $|\mathscr{C}_\beta| \leq \lambda^{+n}$, f_β/I^* existiert, da $< I^*$ $< \lambda^{+n+1}$-gerichtet ist.

Zitat 10.4. *Aus Beweis des Satzes (8.1) der Existenz einer kleinsten oberen Schranke zitieren wir: Für alle Ultrafilter D auf a mit $D \cap I^* = \emptyset$ und für alle $\mu' < \lambda$ sowie für alle $\langle S_\alpha : \alpha \in a\rangle$ mit $|S_\alpha| \leq \mu'$ gilt:*

$$\textstyle\prod_{\alpha \in a} S_{\alpha_{/D}} \textit{ schneidet } \langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda^{+n}\rangle \textit{ nicht konfinal.}$$

Zitat 10.5. *Es gibt eine kleinste obere Schranke g/D für $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$ für alle Ultrafilter D auf a mit $D \cap I^* = \emptyset$.*

Es gibt nach der $< \lambda^{+n+1}$-Gerichtetheit von $<_{I^*}$ eine obere Schranke $\overline{g}/I^*$ zu $\langle f_\alpha/I^* : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$, o.B.d.A. $g \leq_D \overline{g}$, sonst ersetze g durch $\min(g, \overline{g})$.

O.B.d.A. gelte $\forall \alpha \in a.\ \operatorname{cf}(g(\alpha)) > |a|$, sonst wenn $\operatorname{cf}(g(\alpha)) < |a|$ für D-viele $\alpha \in a$ wäre, hätten wir wieder konfinales Einscheiden durch eine Familie von Säulen S_α mit $|S_\alpha| \leq |a|$ für $\alpha \in X \in D$. [Bild]

Wir haben $g(\alpha) = g(\rho^{+n}) < \rho^{+n}$. a wird nach dem Verhalten von $\operatorname{cf}(g(\alpha)) = \operatorname{cf}(g(\rho^{+n}))$ wie folgt in n Möglichkeiten zerlegt:

- $S_0^{+n} = \{\alpha \in a : \operatorname{cf}(g(\alpha)) < \rho\}$ bzw. $S_0^{+n} = \{\rho \in C : \operatorname{cf}(g(\rho^{+n})) < \rho\}$
- $S_k^n = S_k^{+n} = \{\alpha \in a : \operatorname{cf}(g(\alpha)) = \rho^{+k}\}$ bzw. $S_k = \{\rho \in C : \operatorname{cf}(g(\rho^{+n})) = \rho^{+n}\}$

Da D ein Ultrafilter auf a ist, gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $S_k^n \in D$.

Behauptung. $S_0^n \in D$

Beweis Sonst sei $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $S_k^n \in D$. Setze $a' = \{\rho^{+k} : \rho \in C\}$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf a' und k an. Dann gilt nach der Annahme, dass n das kleinste Gegenbeispiel wäre

$$K = \{\varrho\imath C : \varrho^{+k} \in \bigcup_{i=1}^{k} b_{\lambda^{+i}}\} \text{ enthält eine club Teilmenge.}$$

Durh Verschiebung der Argumente um $n-k$ kardinal Nachfogerschritte erhalten wir:

$$\mathrm{cf}\left(\prod a'_{/D'}\right) = \mathrm{cf}\left(\prod a/D\right) = \lambda^{+n} \tag{10.1}$$

für $A' \in D' :\Leftrightarrow \{\rho^{+n-k} : \rho \in A'\} \in D$.

$K^{+n} \notin I$, da K eine club-Teilmenge von C umfasst. $K^{+n} \in D$, da $D \cap I = \emptyset$. Daher ist $K^{+k} \in D'$ und somit $\mathrm{cf}\left(\prod a'/D'\right) \leq \lambda^{+k}$. Somit ist $\prod a'_{/D'} = \prod K^{+k}/D' \leq \lambda^{+k}$, im Widerspruch zu (10.1). $\dashv$

Zwischenbehauptung. *Es gibt ein $b \in D$, so dass $\langle f_\alpha \upharpoonright b/D : \alpha < \lambda^n \rangle$ konfinal in $\prod b/I^*$ und*

$$\forall k \in \prod b_{/I^*}.\ (k <_{I^*} g \upharpoonright b \rightarrow \exists \alpha.\ k \leq_{I^*} f_\alpha \upharpoonright b).$$

Beweis Wie im Satz über die Existenz einer künstlichen oberen Schranke (8.1). $\dashv$

Sei b wie in der Zwischenbehauptung. $b \in D$, D ist ein Ultrafilter auf $a = C^{+n}$.

Setze $b_\alpha := \{\delta \in b : f_\alpha(\delta) < g(\delta)\} \in D$. Sei $b'_\alpha := b_\alpha \cap S_0^{+n} \in D$.

$b'_\alpha \notin I^*$, da $D \cap I^* = \emptyset$. Daher und nach der Definition von I^* ist $b'_\alpha \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda^{+k}} \notin I$.

Nach der Definition von I haben wir

$$\left\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \left(b'_\alpha \setminus \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\right)\right\} \text{ stationär in } \lambda$$
$$\text{bzw. } \left\{\rho \in S_0 : \rho^{+n} \in \left(b'_\alpha \setminus \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\right)\right\} \text{ stationär in } \lambda.$$

Für $\rho \in S_0$ ist nach der Definition von S_0 $\mathrm{cf}(g(\rho^{+n})) < \rho$. Wir wenden das Lemma 3.8 (von Fodor) an, für jedes $\alpha \in \lambda^{+n}$ einzeln, auf die Funktion $F_\alpha : S_\alpha \rightarrow \rho$, $F_\alpha(\rho) = \mathrm{cf}(g(\rho^{+n}))$.

Es gibt $\eta_\alpha < \rho$, so dass $\{\rho \in S_\alpha : \mathrm{cf}(g(\rho^{+n})) = \eta_\alpha\}$ stationär in λ ist. Nach der Definition von I ist also

$$\{\delta \in b'_\alpha \setminus \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}} : \mathrm{cf}(g(\delta)) = \eta_\alpha\} \notin I$$
$$\text{also } \{\delta \in b'_\alpha : \mathrm{cf}(g(\delta)) = \eta_\alpha\} \notin I^*$$

λ^{+n} ist regulär und damit existiert nach dem Schubfachprinzip auf λ^{+n} ein α, so dass für konfinal viele α $\eta_\alpha = \eta_{\alpha_0}$ ist.

$A = \{\alpha < \lambda^{+n} : \eta_\alpha = \eta_{\alpha_0}\}$, $C := \{\delta \in b : \mathrm{cf}(g(\delta)) = \eta_{\alpha_0}\}$, ohne Einschränkung $C \in D$.

Es gibt also eine Säule S für $\beta \in C \subseteq a$, wobei $S'(\beta)$ konfinal in $g(\beta)$ und $|S'(\beta)| = \mathrm{cf}(g(\beta)) = \eta_{\alpha_0}$. Dies ist ein Widerspruch zur Zwischenbehauptung 10.4 über kleine konfinale Familien in $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda^{+n} \rangle$. $\dashv$

Nun kommen wir zur zweiten Station:

Satz 10.6 (über pcf(pcf(·))). *Sei $b \subseteq \operatorname{pcf}(a)$ und $|b| < \min(b)$. Dann ist $\operatorname{pcf}(b) \subseteq \operatorname{pcf}(a)$.*

Korollar 10.7. *Für $b = \operatorname{pcf}(a)$ erhalten wir unter der Annahme $|\operatorname{pcf}(a)| < \min(\operatorname{pcf}(a))$ (die aus $(2^{|a|} < \min(a)$ folgt) aus dem obigen Satz $\operatorname{pcf}(\operatorname{pcf}(a)) \subseteq \operatorname{pcf}(a)$. Aus $\operatorname{pcf}(x) \supseteq x$ folgt $\operatorname{pcf}(\operatorname{pcf}(a)) = \operatorname{pcf}(a)$.*

Beweis des Satzes 10.6. Sei $\lambda^* \in \operatorname{pcf}(b)$, und dies werde durch das Ideal I_{λ^*} über $b \subseteq \operatorname{pcf}(a)$ bezeugt. $\operatorname{tcf}\left(\prod b_{/I_{\lambda^*}}\right) = \lambda^*$. Ohne Einschränkung ist $\lambda^* \notin b$, ansonsten ist der Beweis fertig. Da $b \subseteq \operatorname{pcf}(a)$, gibt es für $\lambda \in b$ ein Ideal I_λ über a, so dass $\lambda = \operatorname{tcf}\left(\prod a_{/I_\lambda}\right)$. Ein Limes bzw. Durchschnitt der Ideale $\langle I_\lambda : \lambda \in b\rangle$ mittels I_{λ^*} wird definiert durch

$$I := \{x \subseteq a : \{\lambda \in b : x \notin I_\lambda\} \in I_{\lambda^*}\}.$$

Erinnerung 10.8. *Für ein Ideal I auf a werden I^+ und I^* wie folgt definiert:*

$$I^+ := \{x \subseteq a : x \notin I\}$$
$$I^* := \{x \subseteq a : a \setminus x \in I\}$$

Behauptung 1. $\lambda^* = \operatorname{tcf}\left(\prod a_{/I}\right)$.

Beweis Die Behauptung wird durch Angabe einer konfinalen echt aufsteigenden Folge bewiesen. Es gilt $J_{<|b|^+} \subseteq I$, da jedes $x \in J_{<|b|^+}$ beschränkt in b ist. Sei für $\lambda \in b$ $\lambda = \operatorname{tcf}\left(\prod a_{/I_\lambda}\right)$ bezeugt durch $\langle f^\lambda_{\alpha/I_\lambda} : \alpha < \lambda\rangle$. Zu $g \in \prod b$ sei $G(g) \in \prod a_{/J_{<|b|^+}}$ eine obere Schranke von $\langle f^\lambda_{g(\lambda)} : \lambda \in b\rangle$. $G(g)$ existiert, da die Halbordnung $<_{J_{<|b|^+}}$ $< |b|^+$ - gerichtet ist. $\operatorname{tcf}(\prod b/I_{\lambda^*}) = \lambda^*$ wurde bezeugt durch $\langle g_\beta : \beta < \lambda^*\rangle$. Eine konfinal echt $<_I$-aufsteigende Folge kann gefunden werden als Teilfolge von $\langle G(g_\alpha) : \alpha < \lambda^*\rangle$. Wir zeigen zunächst, dass $\langle G(g_\alpha) : \alpha < \lambda^*\rangle$ $<_I$- konfinal in $\prod a/I$ ist.

Behauptung 2. *Zu $f \in \prod a/I$ gibt es ein $\beta \in \lambda^*$, so dass $\forall \alpha \in [\beta, \lambda^*).\ f <_I G(g_\alpha)$.*

Beweis Zu $f \in \prod a/I$ definieren wir $F(f) : b \to \mathbf{V}$, $F(f)(\lambda) = \min\{\alpha < \lambda : f <_{I_\lambda} f^\lambda_\alpha\}$, da $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ $<_{I_\lambda}$ true konfinal.

Es gibt ein $\beta \in \lambda^*$ mit $F(f) <_{I_{\lambda^*}} g_\beta$, da $\langle g_\beta : \beta < \lambda^*\rangle$ konfinal in $\prod b_{I_{\lambda^*}}$ ist und für alle $\alpha \in [\beta, \lambda^*)$ gilt ebenso $F(f) <_{I_{\lambda^*}} g_\alpha$. Nach der Definition von I ist $f <_{I_\lambda} f^\lambda_{g_\alpha(\lambda)}$ für alle bis auf I_{λ^*}-wenige $\lambda \in b$.

Also

$$\{\gamma \in b : f^\lambda_{g_\alpha(\gamma)} >_{I_\lambda} f\} \in I^*_{\lambda^*}$$
$$\text{bzw. } \{\gamma \in b : f^\lambda_{g_\alpha(\gamma)} <_{I_\lambda} f\} \in I_{\lambda^*}$$

für alle $\alpha \in [\beta, \lambda^*)$. Daraus folgt $f <_I G(g_\alpha)$ für alle $\alpha \in [\beta, \lambda^*)$ nach der Definition von I, wodurch die Behauptung gezeigt ist. ⊣

Wie im Beweis des Lemmas 1.11 (von Pouzet) wählen wir induktiv zu $\alpha < \lambda^*$ ein $\beta(\alpha)$, $\beta(\gamma)$ für $\gamma < \alpha$, so dass $G(g_\alpha) < G(\gamma)$ für $\gamma \in [\beta(\alpha), \lambda)$. Dann ist

$\langle G_\beta(\alpha) : \alpha < \lambda\rangle$ eine $<_I$-aufsteigende konfinale Folge. $\dashv$

$\dashv$

Nun kommen wir zur dritten Station:

Satz 10.9 („Transitivität“ der Folge der Generatoren)**.** *Sei* $(2^{|a|})^+ < \min(a)$, $c = \mathrm{pcf}(a)$. *Dann gibt es für* $\mathrm{pcf}(c)$ *Generatoren* $\langle b_\lambda(c) : \lambda \in \mathrm{pcf}(c)\rangle$, *so dass*

1) $\forall\lambda\forall\mu \in b_\lambda(c).\ b_\mu(c) \subseteq b_\lambda(c)$ *und*

2) $\forall\lambda.\ \mathrm{pcf}(b_\lambda(c)) = b_\lambda(c)$.

Eigenschaft 1) ist die „Transitivität“.

Den Beweis teilen wir in mehrere Lemmata auf.

Lemma 10.10. *[über die Generatoren für* $c = \mathrm{pcf}(a)$ *und für* $J_{<\lambda}(c)$, $\lambda \in \mathrm{pcf}(c)$*] Sei* $2^{|a|} < \min a$*. Sei* $\lambda \in \mathrm{pcf}(c) = \mathrm{pcf}(a)$*. Sei* $J_{<\lambda^+}(a) = J_{<\lambda}(a) + b_\lambda$*. Dann ist* $J_{<\lambda^+}(c) = J_{<\lambda}(c) + \mathrm{pcf}(b_\lambda)$.

Bemerkung 10.11. *Wir haben* $b_\lambda \subseteq a$ *und* $\mathrm{pcf}(b_\lambda) \subseteq \mathrm{pcf}(a) = c$.

Beweis

„$\supseteq$“: Wir zeigen $\mathrm{pcf}(b_\lambda) \in J_{<\lambda^+}(c)$. Wir schreiben abkürzend $d_\lambda = \mathrm{pcf}(b_\lambda)$. Zu zeigen ist, dass für jeden Ultrafilter D auf c mit $d_\lambda \in D$ $\mathrm{cf}\left(\prod c/D\right) \leq \lambda$ gilt.

Für $\mu \in \mathrm{pcf}(a) = c$ gibt es einen Ultrafilter D_μ auf a, so dass $\mathrm{cf}\left(\prod a_{/D_\mu}\right) = \mu$. Für $\mu \in d_\lambda = \mathrm{pcf}(b_\lambda)$ gibt es einen Ultrafilter D_μ auf a, so dass $\mathrm{cf}\left(\prod a_{/D_\mu}\right) = \mu$ und $b_\lambda = D_\mu$. Definiere

$$\tilde{D} = \{x \subseteq a : \{\mu \in d_\lambda : x \in D_\mu\} \in D\}.$$

Dann ist nach dem Beweis des Satzes 10.6

$$\mathrm{cf}\left(\prod a_{/\tilde{D}}\right) = \mathrm{cf}\left(\prod c_{/D}\right) \leq \lambda.$$

Also ist $d_\lambda \in J_{<\lambda^+}(c)$.

„$\subseteq$“: Noch zu zeigen: d_λ erzeugt $J_{<\lambda^+}(c)$. Angenommen nicht, somit gibt es ein $e \in J_{<\lambda^+}(c)$, also $e \setminus d_\lambda \notin J_{<\lambda}(c)$. Dann gibt es D auf c, $e \in D$ mit $\mathrm{cf}\left(\prod e/D\right) = \lambda$. [Bemerkung $\mathrm{cf}\left(\prod c/D\right) = \mathrm{cf}\left(\prod e/D\right)$]. Wir haben $e \setminus d_\lambda \subseteq c = \mathrm{pcf}(a)$. Also $\forall\mu \in e \setminus d_\lambda \exists D_\mu$ auf a. $\mathrm{cf}\left(\prod a_{/D_\mu}\right) = \mu$. Es gilt $\mu \notin \mathrm{pcf}(b_\lambda) = d_\lambda$, daher $b_\lambda \notin D_\mu$, woraus $a \setminus b_\lambda \in D_\mu$ folgt. Wir bilden wieder $\tilde{D}$:

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= \{x \subseteq a : \{\mu \in \mathrm{pcf}(a) : x \in D_\mu\} \in D\}\\ &= \{x \subseteq a : \{\mu \in e : x \in D_\mu\} \in D\}\end{aligned}$$

Es gilt $b_\lambda \notin \tilde{D}$, da $b_\lambda \notin D_\mu$ für $\mu \in e$, und wegen Korollar 8.10 im Beweis des Satzes vom Generator (Satz 8.5) $\mathrm{cf}\left(\prod a_{/\tilde{D}}\right) < \lambda$, im Widerspruch zur Wahl von $e \in J_{<\lambda^+}(c) \setminus J_{<\lambda}(c)$.

$\dashv$

Notation 10.12. *Im Folgenden stehe $J_{<\lambda}$ für $J_{<\lambda}(c)$.*

Lemma 10.13 (über die Darstellung der Generatoren b_λ). *Sei N sonnig für $(2^{|a|})^+$, dies bedeutete:*

- $|N| = (2^{|a|})^+$,
- $N = \bigcup_{i<(2^{|a|})^+} N_i$,
- $\langle N_i : i < (2^{|a|})^+\rangle$ *stetig aufsteigend im folgenden Sinn:* $\langle N_i : i \leq j\rangle \in N_{j+1}$, $N_i \subseteq N_j$,
- $N_i \prec H(\theta)$,
- $\{a\} \cup 2^{|a|} \subseteq N$.

Setze $c = \operatorname{pcf}(a)$, es gelte $(2^{|a|})^+ < \min(a)$. Sei $\lambda \in \operatorname{pcf}(c)$ bezeugt durch $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\rangle \in N \cap \prod c$. Es gelte für alle $k \in \prod b_\lambda \cap N$:

$$\exists\alpha_0\forall\alpha \in [\alpha_0, \lambda).\ k <_{J_{<\lambda}} f^\lambda_\alpha \restriction b_\lambda$$

Dann *ist* $b_\lambda =_{J_{<\lambda}} \{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\}$

Bemerkung 10.14. *Das „$\geq$“ in der letzten Menge kann auch äquivalent durch ein „$=$“ ersetzt werden. Es sei hier daran erinnert, dass $\chi_N(\alpha) = \sup(N \cap \alpha)$.*

Beweis[Beweis des Lemmas]

„$\subseteq$“: Angenommen nicht:

$$b_\lambda \backslash \{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\} \notin J_{<\lambda},$$
$$\text{also } b' := b_\lambda \cap \{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) < \chi_N(\alpha)\} \notin J_{<\lambda}.$$

Sei $h : c \to \mathbf{V}$ definiert durch

$$h(\alpha) := \begin{cases} f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) & \text{für } \alpha \in b' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir stellen $h(\alpha) < \chi_N(\alpha)$ fest. Es gilt $\forall\alpha\exists i_\alpha\forall i \geq i_\alpha.\ h(\alpha) < \chi_{N_i}(\alpha)$, da $\chi_N = \sup_{i<(2^{|a|})^+} \chi_{N_i}$. Die $\{i_\alpha : \alpha \in a\}$ sind durch $\hat{\imath}$ in $(2^{|a|})^+$ beschränkt. Dann $\exists\hat{\imath}\forall\alpha \in b_\lambda.\ h(\alpha) < \chi_N(\alpha)$.

Es gilt $\chi_{N_i} \in N \cap \prod c$ für $i \geq \hat{\imath}$. Nach der Voraussetzung gibt es $\exists\delta_{0,i} \in N \cap \lambda\forall\delta \geq \delta_{0,i}.\ \chi_{N_i} <_{J_{<\lambda}} f^\lambda_\delta \restriction b_\lambda$. Wir nehmen nun $j \geq \hat{\imath}$ so groß, dass $\chi_{N_j}(\lambda) > \delta_{0,\hat{\imath}}$, da $\lim(\chi_{N_i}(\lambda)) = \sup(N \cap \lambda)$. Wir erhalten

$$h \restriction b_\lambda <_{J_{<\lambda}} \chi_{N_{\hat{\imath}}} \restriction b_\lambda < f^\lambda_\delta \restriction b_\lambda <_{J_{<\lambda}} f^\lambda_{\chi_j(\lambda)} \restriction b_\lambda \leq f^\lambda_{\chi_N(\lambda)} \restriction b_\lambda$$

für $\delta > \delta_{0,\hat{\imath}}$.

Es gilt aber auch $h \restriction b' =_{J_{<\lambda}} f^\lambda_{\chi_N(\lambda)} \restriction b'$ nach Definition $b' \notin J_{<\lambda}$. Wir haben also einen Widerspruch.

„$\supseteq$": Angenommen $\{\alpha \in c : f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\} \setminus b_\lambda \notin J_{<\lambda}$. Dann ist d $:=$ $\{\alpha \in c : f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\} \setminus b_\lambda \in J_{<\lambda'} \setminus J_{<\lambda}$ mit einer möglichst kurzen Folge, $\lambda' > \lambda$. $d \notin J_{<\lambda^+}$, da b_λ $J_{<\lambda^+}$ erzeugt.

$\prod d_{/J_{<\lambda^+}}$ ist $<\lambda^+$-gerichtet, daher $\exists g \in \prod d \forall \alpha.\ g >_{J_{<\lambda^+}} f^\lambda_\alpha$ und $g \in N$. Da $c \subseteq N$ ist $\mathrm{rge}(g) \subseteq N$. Es gilt

$$f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)} <_{J_{<\lambda^+}} g <_{\text{pkt.weise}} \chi_N,$$

da für alle $h \in \prod c \cap N$ mit $\mathrm{rge}(h) \subseteq N$ gilt $\chi_N > h$, ein Widerspruch zu $d \notin J_{<\lambda^+}$ und $d = \{\alpha \in c : f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\} \setminus b_\lambda$.

$\dashv$

Beweis[Beweis von Satz 10.9] Wenn wir eine Folge $\langle b_\lambda(c) : \lambda \in \mathrm{pcf}(c)\rangle$ mit Eigenschaft 1 gefunden haben, dann können wir diese induktiv über $\lambda \in \mathrm{pcf}(c)$ vergrößern zu $\langle b^*_\lambda : b_\lambda = b^*_\lambda, \lambda \in \mathrm{pcf}(c)\rangle$, so dass die Eigenschaften 1 und 2 gelten. Im Induktionsanfang $\lambda = \min(c)$ setze $b^*_\lambda = b_\lambda = \{\lambda\}$. Für den Induktionsschritt seien b^*_θ für $\theta < \lambda$ schon gegeben mit Induktionsvoraussetzung $b^*_\theta(c) \supseteq b_\theta(c)$ und $\mathrm{pcf}(b^*_\theta) = b^*_\theta$. Es gilt $\mathrm{pcf}(b_\lambda(c)) \subseteq \lambda + 1$, da $b_\lambda(c) \in J_{<\lambda^+}(c)$. Aus Lemma 8.11 (über ein endliche Überdeckung) folgt:

$$\exists n \exists \theta_1, \ldots, \theta_n \in \lambda \cap \mathrm{pcf}(b_\lambda(c)).\ \mathrm{pcf}(b_\lambda(c)) \cap \lambda \subseteq b_{\theta_1}(c) \cup \ldots \cup b_{\theta_n}(c)$$

und daher

$$\mathrm{pcf}(b_\lambda(c)) \subseteq b^*_{\theta_1}(c) \cup \ldots \cup b^*_{\theta_n}(c) \cup b_\lambda = b^*_\lambda.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(b_\lambda(c))) \subseteq \mathrm{pcf}(b^*_{\theta_1}(c) \cup \ldots \cup b^*_{\theta_n}(c) \cup b_\lambda) = \\ \mathrm{pcf}(b^*_{\theta_1}(c)) \cup \ldots \cup \mathrm{pcf}(b^*_{\theta_n}(c)) \cup \mathrm{pcf}(b_\lambda)) \subseteq b^*_\lambda\end{aligned}$$

nach Satz 10.6. Wir überprüfen, ob c die Voraussetzung erfüllt: Da $\left(2^{|a|}\right)^+ <$ $\min(a)$, $c = \mathrm{pcf}(a)$ und $|c| \leq 2^{|a|}$ ist c progressiv. Hiermit sind auch die $b_\lambda(c)$ progressiv, Progressivität vererbt sich auf Teilmengen. Dass die neue Folge $\langle b^*_\lambda :$ $\lambda \in \mathrm{pcf}(c)\rangle$ auch Eigenschaft 1 erfüllt, lässt sich induktiv über λ beweisen.

Nun wird die Transitivität arrangiert, wir zeigen: Es gibt für $\lambda \in \mathrm{pcf}(c)$ eine Folge $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\rangle \in \prod c$, so dass

1) $\forall k \in \prod c \exists \alpha_0 < \lambda \forall \alpha > \alpha_0.\ k <_{J_{<\lambda}} f^\lambda_\alpha$ und

2) für alle $\left(2^{|a|}\right)^+$-sonnigen N gilt:

   2.i) $f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)} \leq \chi_N$,

   2.ii) $\forall \alpha \in c \forall \mu \in c.\ \left[\alpha < \mu \wedge \mathrm{cf}\left(f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)}(\mu)\right) > \omega\right] \rightarrow f^{\mu}_{f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)}(\mu)}(\alpha) \leq f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)}(\alpha)$

   2.iii) $\forall \alpha \in c \forall \mu \in b_\lambda.\ \mathrm{cf}\left(f^{\lambda}_{\chi_N(\lambda)}(\mu)\right) > \omega$

Zuerst zeigen wir, dass wir fertig sind, wenn wir so eine Folge gefunden haben. Sei also eine entsprechende Folge f^λ_α gegeben, dann definiere:

$$b^*_\lambda := \{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_n(\lambda)}(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\}$$
$$b^*_\mu := \{\alpha \in c : f^\mu_{\chi_n(\lambda)}(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\}$$

Sei nun $\mu \in b^*_\lambda$, das heißt $f^\lambda_{\chi_n(\lambda)}(\mu) \geq \chi_N(\mu)$. Sei $\delta \in b^*_\mu$, zeige $\delta \in b^*_\lambda$. Wir erhalten aud 2.iii)cf $\left(f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\mu)\right) > \omega$. Nach 2.ii) gilt dann:

$$f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\delta) \geq f^\mu_{\chi_N(\mu)}(\delta) = \chi_N(\delta).$$

Wir nehmen an, dass $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ schon wie im Satz von der Existenz einer kleinsten oberen Schranke (8.1) definiert ist, das heißt

$$f^\lambda_\alpha(\delta) = \min\{\sup\{f^\lambda_\beta(\delta) : \beta \in c\} : c \text{ club in } \alpha \text{ und } c \text{ unabhängig von } \delta\}$$

Da $\alpha > \min(c)$ und $|c| \leq 2^{|a|}$ also $|c| < \min(c)$ dürfen wir die Clubs, die zunächst von $\delta \in c$ abhängen alle schneiden. Dies führt zu (1) für $\operatorname{cf}(\delta) = \left(2^{|a|}\right)^+$.

Die Folge $\langle f^\lambda_{\alpha,n} \lambda \in \operatorname{pcf}(c), \delta \in c\rangle$ wird nun induktiv über $\mathbb{N}$ gewählt:

IA : $f^\lambda_{\alpha,0}(\delta) = f^\lambda_\alpha(\delta)$ für $\delta \in c$ und $\lambda \in \operatorname{pcf}(c)$.

IS : $f^\lambda_{\alpha,n+1}(\delta) = \sup\left(\{f^\lambda_{\alpha,n}(\delta)\} \cup \{f^\mu_{f^\lambda_{\alpha,n}(\mu)}(\delta) : \delta \leq \mu < \lambda, \mu \in c\}\right)$.

Definiere $g^\lambda_\alpha(\delta) = \sup_{n\in\omega} f^\lambda_{\alpha,n}(\delta)$. Nach IS erhalten wir

$$\operatorname{cf}(g^\lambda_\alpha(\mu)) > \omega \Leftrightarrow (\forall \delta \leq \mu \leq \lambda)(g^\mu_{g^\lambda_\alpha(\mu)}(\delta) \leq g^\lambda_\alpha(\delta)). \tag{10.2}$$

Behauptung 10.15. $\langle g^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda, \lambda \in \operatorname{pcf}(c)\rangle$ *erfüllt die in 1) und 2) an eine Folge von Folgen gestellten Bedingungen.*

Zwischenbehauptung. *Wenn* $\alpha < \lambda$, $\alpha \in \operatorname{cl}(N \cap \lambda) = (N \cap \lambda) \cup \operatorname{acc}(N \cap \lambda)$, *dann* $\forall n \forall \delta \in \lambda \cap N$. $f^\lambda_{\alpha,n}(\delta) \in \operatorname{cl}(N' \cap \delta)$.

Beweis

- Fall 1: $\alpha \in N$, daher $f^\lambda_{\alpha,n} \in N$. Da $\delta \in c \subseteq N$ ist nun $f^\lambda_{\alpha,n}(\delta) \in N$ und $f^\lambda_{\alpha,n}(\delta) \in N \cap \delta$, da $f^\lambda_{\alpha,n}(\delta) < \delta$.
- Fall 2: $\alpha \in \operatorname{cl}(N \cap \lambda) \setminus N$. Wir haben $\alpha = \lim_{i<\left(2^{|a|}\right)^+} \sup(N_i \cap \alpha)$. Für konfinal viele $i \in \left(2^{|a|}\right)^+$ ist $\sup(N_i \cap \alpha) \in N \cap \lambda$.

  $f^\lambda_\alpha(\delta) = \sup\{f^\lambda_\beta(\delta) : \beta \in c\}$, wobei c ein club in α (unabhängig von δ) ist, so dass in (1) das Minimum angenommen wird. Wir haben

  $$f^\lambda_\alpha(\delta) \,?\, \sup\{f^\lambda_\beta(\delta) : \beta \in C \cap N\} \in \operatorname{cl}(N \cap \delta)$$

  nach dem 1. Fall.

⊣

Nun ergibt sich aus Gleichung (10.2) zusammen mit der Zwischenbehauptung, dass $\langle g^\lambda_\alpha : \lambda \in \mathrm{pcf}(c), \alpha \in c\rangle$ 1) und 2) erfüllt, und der Beweis ist beendet. ⊣

Nun kommen wir zur vierten Station:

Satz 10.16 (Localisation)**.** *Sei* $\left(2^{|a|}\right)^+ < \min(a)$ *und damit insbesondere* $\mathrm{pcf}(a) = \mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(a))$. *Setze* $c := \mathrm{pcf}(a)$. *Dann gilt*

$$\forall d \subseteq c \forall \mu \in \mathrm{pcf}(d) \exists d' \subseteq d.\ |d'| = |a| \wedge \mu \in \mathrm{pcf}(d').$$

Beweis Sei $\langle b_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(c)\rangle$ eine transitive Folge von Generatoren mit $\mathrm{pcf}(b_\lambda(c)) = b_\lambda(c)$. Sei $d \subseteq c$. Sei $\mu \in \mathrm{pcf}(d)$. Wir beweisen den Satz induktiv über $\mu \in \mathrm{pcf}(d)$.

Zwischenbehauptung. *Wir können d durch ein* $\overline{d} = d \cap b_\mu(c) \subseteq b_\mu(c) \subseteq \mu + 1$ *ersetzen. D.h., es gibt ein* $\overline{d}$*, so dass* $\mu \in \mathrm{pcf}\left(\overline{d}\right)$ *und* $\overline{d} \subseteq b_\mu(c) \subseteq \mu + 1$.

Beweis Wir benutzen wieder Korollar 8.10. Es gibt einen Ultrafilter D über c, $d \in D$, so dass $\mu = \mathrm{cf}\left(\prod c/D\right) = \min\{\lambda : b_\lambda(c) \in D\}$ und daher $b_\mu(c) \in D$ und $d \cap b_\mu(c) \in D$, da D Ultrafilter. Dann ist $\mu = \mathrm{cf}\left(\left(d \cap b_\mu(c)\right)/D\right)$. Wir nehmen $\overline{d} = d \cap b_\mu(c)$ und haben also $\mu \in \mathrm{pcf}(\overline{d})$. ⊣

Nun zur Induktion: Im Induktionsanfang ist $\mu \in d$ und $\mu \in \mathrm{pcf}(\{\mu\})$. Gesucht wird ein $d' \subseteq d$ mit $|d'| = |a|$ und $\mu \in \mathrm{pcf}(d')$.

Behauptung. *Ohne Einschränkung hat* $\mathrm{pcf}(d) \cap \mu$ *kein Maximum.*

Beweis Sonst sei $\mu_1 = \max(\mathrm{pcf}(d) \cap \mu) < \mu$. Nach den Eigenschaften der Generatoren ist $\mu_1 \in \mathrm{pcf}(b_{\mu_1}(c))$. Betrachte $d_1 := d \setminus b_{\mu_1}(c)$. Es gilt $\mu \in \mathrm{pcf}(d_1)$. Für jeden Ultrafilter U über d_1 $\mathrm{cf}(\prod c/U) = \min\{\lambda : b_\lambda(c) \in U\}$, also, $\mathrm{pcf}(b_{\mu_1}(c)) = b_{\mu_1}(c) \cap \subseteq d_1 = \emptyset$, $\mu_1 \notin \mathrm{pcf}(d_1)$. Daher ist $\mathrm{pcf}(d_1) \cap \mu \subseteq \mu_1$. Angenommen $\mathrm{pcf}(d_1) \cap \mu$ hat ein Maximum. Die absteigende Kette der Maximumssuche bricht ab, wir können nun auf die Induktionsvoraussetzung zurückgreifen und haben damit die Behauptung begründet. ⊣

Definiere $\kappa := \mathrm{cf}(\mathrm{pcf}(d) \cap \mu)$. Dann ist $\kappa \geq \omega$. Sei $\langle \mu_i : i < \kappa\rangle$ eine in $\mathrm{pcf}(d) \cap \mu$ aufsteigende konfinale Folge.

Zwischenbehauptung. $\mu \in \mathrm{pcf}(\{\mu_i : i < \kappa\})$.

Beweis Sei D ein Ultrafilter auf $\{\mu_i : i < \kappa\}$, der alle Endabschnitte enthält. Wir haben

$$\mathrm{cf}\left(\prod \{\mu_i : i < \kappa\}_{/D}\right) \geq \sup\{\mu : i < \kappa\} \geq \mu.$$

Wie im Beweis vom Intervallsatz (5.2) folgt $\mu \in \mathrm{pcf}(\{\mu_i : i < \kappa\})$. ⊣

Zwischenbehauptung. *Es genügt ein* $e \subseteq \{\mu_i : i < \kappa\}$ *zu finden, so dass* $\mu \in \mathrm{pcf}(e)$ *und* $|e| \leq |a|$.

Beweis Für alle $\delta \in e$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung $d_\delta \subseteq c$, $|d_\delta| \leq |a|$, so dass $\delta \in \operatorname{pcf}(d_\delta)$. Setze $d' := \bigcup_{\delta \in e} d_\delta$, dann ist $|d'| \leq |e| \cdot |a| \leq |a|^2 = |a|$. Es gilt $\mu \in \operatorname{pcf}(d')$ mit einem aus den „$\delta \in \operatorname{pcf}(d_\delta)$"-Zeugen und den „$\delta \in \operatorname{pcf}(e)$"-Zeugen zusammengebauten Ultrafilter. ⊣

Behauptung. *Es gibt* $e \subseteq \{\mu_i : i < \kappa\}$, $|e| \leq |a|$, *so dass* $\mu \in \operatorname{pcf}(e)$.

Beweis Zu jedem $\alpha \in a \cap \bigcup_{i<\kappa} b_\mu(c)$ gibt es $i_\alpha < \kappa$, so dass $\alpha \in b_{\mu_{i_\alpha}}(c)$, dann setze $S = \{i_\alpha : \alpha \in a\}$. Also ist

$$a \cap \bigcup_{i<\kappa} b_{\mu_i}(c) \subseteq \bigcup_{i \in S} b_{\mu_i}(c). \tag{10.3}$$

Setze $e := \{\mu_i : i \in S\}$. Da $e \subseteq \operatorname{pcf}(d) \subseteq \operatorname{pcf}(c) = c$ folgt aus Lemma 8.11 die Existenz von $k \in \omega$, $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \operatorname{pcf}(e)$, so dass $e \subseteq b_{\delta_1}(c) \cup \ldots \cup b_{\delta_k}(c)$. Wir merken uns: $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \operatorname{pcf}(e)$.

Behauptung. $\exists i \leq k.\ \delta_i = \mu$

Beweis Sonst wären $\delta_1, \ldots, \delta_k < \mu$. μ ist eine Limeszahl, daher existiert ein $i < \kappa$, so dass $\mu_i > \delta_1, \ldots, \delta_k$. Setze

$$A := a \cap (b_{\mu_i}(c) \setminus (b_{\delta_1}(c) \cup \ldots \cup b_{\delta_k}(c))) \neq \emptyset$$

falls $\mu_1 > \delta_1, \ldots, \delta_k$. Es existiert ein Ultrafilter D auf A, so dass $\operatorname{cf}(\prod c/D) = \mu_i$. Andererseits gilt aber nach Inklusion (10.3) $a \cap b_{\mu_i}(c) \subseteq \bigcup_{i \in S} b_{\mu_i}(c)$. Nun erhalten wir aus dem Satz 10.9 über die Transitivität der Generatoren

$$b_{\mu_i} \subseteq b_{\delta_1}(c) \cup \ldots \cup b_{\delta_k}(c),$$

da $\mu_i \in e \subseteq \bigcup_{j=1}^k b_{\delta_j}$. Also $A = \emptyset$, ein Widerspruch. ⊣

⊣

⊣

Nun kommen wir zur fünften Station:

Sei a ein Intervall. Sei $\eta = |a|$, ohne Einschränkung ist $\min(a) = \aleph_{\delta+1}$. Dies funktioniert da alle Kardinalzahlen aus $\operatorname{pcf}(a)$ außer vielleicht der allerersten Nachfolgerkardinalzahlen sind. Dies sieht man so: Annahme $x \in \operatorname{pcf}(a) \setminus \{\min(a)\}$. Wir nehmen an, dass x eine Limeskardinalzahl sei. Dann nehmen wir eine Folge $\langle x_i : i < \operatorname{cf}(x)\rangle$, $x_i \in \operatorname{pcf}(a)$, die gegen x konvergiert. Die Länge $\operatorname{cf}(x) \leq |\operatorname{pcf}(a)| \leq 2^{|a|} < \min(a)$, weshalb x singulär ist.

Sei ρ so festgesetzt, dass $\max(\operatorname{pcf}(a)) = \aleph_{\delta+\rho+1}$ gilt.

Behauptung. $\rho < \eta^{+4}$

Beweis Definiere eine Abschlussoperation auf $\mathscr{P}(\rho+1)$: Sei $X \subseteq \rho + 1$.

i) $\overline{X} := \{\gamma \leq \rho : \aleph_{\delta+\gamma+1} \in \operatorname{pcf}(\{\aleph_{\delta+\varepsilon+1} : \varepsilon \in X\})\}$. Dann ist $\overline{X} \subseteq X$, denn $\operatorname{pcf}(a) \subseteq a$.

   Wir wissen $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, da für alle $c \subseteq \operatorname{pcf}(a)$ gilt: $\operatorname{pcf}(\operatorname{pcf}(c)) = \operatorname{pcf}(c)$.

   Dies ist ein topologischer Abschluss, denn $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup Y$ und $Y \subseteq X \to \overline{Y} \subseteq \overline{X}$.

ii) Nach dem Lokalisationssatz (10.16): Für jedes $X \subseteq \rho + 1$, $\gamma \in \overline{X} = \operatorname{pcf}(\{\aleph_{\delta+\varepsilon+1} : \varepsilon \in X\})$ gibt es $X' \subseteq X$, mit $|X'| = |a| = \eta$, so dass $\gamma \in \overline{X'}$. Wir haben

$$\gamma = \operatorname{cf}\left(\prod_{\varepsilon \in X'} \aleph_{\delta+\varepsilon+1}/D\right)$$

für ein geeignetes D.

iii) Jedes $\overline{X}$ hat ein Maximum, da für alle a'' $\operatorname{pcf}(a'')$ ein Maximum hat.

iv) Nach dem Satz über die club Mengen in den erhöhten Folgen (10.3) erhalten wir: Dort hatten wir ein singuläres λ, $C \subseteq [\operatorname{cf}\lambda, \lambda)$ nur irreguläre Kardinalzahlen, $c = \bigcup_{k \geq 1} C^{+k}$ und $a = C^{+n}$, $n = 1$. Die Menge a von dort ist nun $a' = \operatorname{pcf}(a) \cap \{\aleph_{\delta+\alpha+1} : \alpha < \gamma\}$ für jedes $\gamma < \rho$ mit $\operatorname{cf}(\gamma) > \omega$. Nach unserer Vorüberlegung sind $\aleph_{\delta+\alpha}$, α Limesordinalzahl, singulär und daher haben wir zu $\lambda = \aleph_{\delta+\gamma}$, $\operatorname{cf}\gamma > \omega$ ein $C = \{\aleph_{\delta+\alpha} : \alpha < \gamma, \operatorname{cf}(\alpha) = \omega\}$, $a' = C^{+1} = \{\aleph_{\delta+\alpha+1} : \alpha < \gamma\}$ wie in jenem Satz gewünscht.

Der Satz liefert einen club $\hat{C} \subseteq \gamma$, so dass $d = \{\aleph_{\delta+\alpha+1} : \alpha \in \hat{C}\} \subseteq b_{\lambda^+}(a')$. Setze $\tilde{d} := \{\aleph_{\delta+\alpha} : \alpha \in C\}$, $d = \tilde{d}^{+1} \subseteq b_{\lambda^+}(a')$. Dann ist $\{\varepsilon \leq \rho : \aleph_{\delta+\varepsilon+1} \in \operatorname{pcf}(\{\aleph_{\delta+\theta+1} : \theta \in \hat{C}\})\} = \{\varepsilon \leq \rho : \aleph_{\delta+\varepsilon+1} \in \operatorname{pcf}(d)\}$. Somit ist $\operatorname{pcf}(d) \subseteq \operatorname{pcf}(b_{\lambda^+}(a)) \subseteq \lambda^+$. Wir hatten $\lambda = \aleph_{\delta+\gamma}$, $\lambda^+ = \aleph_{\delta+\gamma+1}$. Es gilt $\operatorname{pcf}(d) \subseteq [\min(a), \aleph_{\delta+\gamma+1}]$.

v) $[\eta^+, \rho]$ ist abgeschlossen, da $\rho = \max(\operatorname{pcf}(a)) = \aleph_{\delta+\rho+1}$ in unserer $X \mapsto \overline{X}$ Topologie.

Behauptung. *i) - v) impliziert, dass* $\rho \leq \eta^{+3} = |a|^{+3}$, *also* $[\eta^{+4}, \rho] = \emptyset$.

Beweis[Indirekter Beweis] Angenommen nicht: $|\rho| \geq \eta^{+4}$. Wir definieren $\tilde{\operatorname{cl}}$ auf $\mathscr{P}(\eta^{+4} + 1)$ durch

$$\tilde{\operatorname{cl}}(X) = \begin{cases} \overline{X} & \text{falls } \overline{X} \subseteq \eta^{+4} \\ \overline{X} \cap \eta^{+4} \cup \{\eta^{+4}\} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{10.4}$$

Auf $[0, \eta^{+4}]_{\mathbf{On}}$ haben wir die $\tilde{\operatorname{cl}}$-Rechenregeln i) - vi)

Nun wird Club guessing angewandt: Für $\kappa = \eta^{+1}, \lambda = \eta^{+3}$ gibt es eine club guessing Folge $\langle S_\alpha : \alpha < \eta^{+3}, \operatorname{cf}(\alpha) = \eta^{+1}\rangle$, das heißt:

- $S_\alpha \subseteq \alpha$, S_α club in α, $\operatorname{otp}(S_\alpha) = \eta^{+1}$ und
- für jeden club $D \subseteq \eta^{+3}$ gibt es stationär viele α, so dass $\operatorname{cf}(\alpha) = \eta^{+1}$, $S_\alpha \subseteq D$.

Setze $\theta > 2^{2^{|a|}}$, θ regulär. Wir nehmen eine Folge $\langle M_\beta : \beta \leq \eta^{+3}\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $\beta \leq \eta^{+3}$ gilt $M_\beta \prec (H(\theta), \in, <_*)$
- $\langle M_\gamma : \gamma \leq \beta\rangle \in M_{\beta+1}$ für alle $\beta \leq \eta^{+3}$ stetig: $M_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} M_\beta$ für eine Limeszahl γ.

- $|M_\beta| = \eta^{+3}$ („klein“)
- $\eta^{+3} \subseteq M_0$ („groß“)
- $\{\langle X, \overline{X}\rangle : X \subseteq \eta^{+4} + 1\} \in M_0$
- $\langle S_\alpha : \alpha < \eta^{+3}, \operatorname{cf}(\alpha) = \eta^{+1}\rangle \in M_0$.

Definition 10.17. $\gamma_\beta := M_\beta \cap \eta^{+4}$.

Bemerkung 10.18. *Es gilt:*

- $\gamma_\beta \in \eta^{+4}$*, nach dem Lemma über die teilweise Transitivität 9.11.*
- $\langle \gamma_\beta : \beta \leq \eta^{+3}\rangle$ *ist stetig.*
- $C \subseteq \alpha$ *club* $\Leftrightarrow \{\gamma_\beta : \beta \in C\}$ *club in* γ_α.

Definition 10.19. Für $\alpha, \beta \in \eta^{+3}$ mit $\operatorname{cf}(\alpha) = \eta^{+3}$, setzen wir

$$E_\alpha^\beta = \{\gamma_\delta : \delta \in S_\alpha \cap \beta\}.$$

Bemerkung 10.20. $E_\alpha^\beta \in M_{\beta+1}$ *für* $\beta \geq \alpha$ *und für* $\alpha < \eta^{+3}$, $\beta < \alpha$.

Bemerkung 10.21. *Wenn* $\overline{E_\alpha^\beta} \in M_{\beta+1}$ *in* η^{+4} *beschränkt ist, dann* $M_{\beta+1} \models \overline{E_\alpha^\beta}$ *ist in* η^{+4} *beschränkt und somit auch* $\overline{E_\alpha^\beta} \subseteq \gamma_{\beta+1}$.

Eigenschaft (iv) der Topologie von $(X \mapsto \overline{X})$ angewandt auf $\gamma = \gamma_{\eta^{+3}}$, gibt:

$$\exists D \subseteq \gamma_{\eta^{+3}}.\ \overline{D} \subseteq \gamma_{\eta^{+3}} + 1,\ D \text{ club}$$

Es gibt ein $\alpha < \eta^{+3}$ mit $\operatorname{cf}(\alpha) = \eta^{+1}$, so dass

$$S_\alpha \subseteq \{\beta < \eta^{+3} : \gamma_\beta \in D\},$$

da $\langle S_\alpha : \alpha < \eta^{+3}, \operatorname{cf}(\alpha) = \eta^{+1}\rangle$ eine club guessing Folge ist und da $\tilde{D} = \{\beta : \gamma_\beta \in D\}$ ein club in η^{+3} ist. $S_\alpha \subseteq \{\beta < \eta^{+3} : \gamma_\beta \in D\}$ impliziert $S_\alpha^* := \{\gamma_\beta : \beta \in S_\alpha\} \subseteq D$ und S_α^* ist konfinal in γ_α.

Beachte $\alpha \in M_0$. Da für jedes $d \subseteq \operatorname{pcf}(a)$ $\operatorname{pcf}(d)$ ein maximales Element hat, haben wir iii), also

$$x = \max \overline{S_\alpha^*} = \max\{\gamma_\beta : \aleph_{\delta+\gamma_\beta+1} \in \operatorname{pcf}\{\aleph_{\delta+\varepsilon+1} : \varepsilon \in S_\alpha^*\}\}. \tag{10.5}$$

Für $x \in \overline{S_\alpha^*}$ gibt es $y \subseteq S_\alpha^*$, $|y| = \eta$, $x \in \overline{y}$. Sei $\lim_{i<\eta^{+1}} \beta_i = \alpha$. Da $S_\alpha^* = \bigcup_{i<\eta^{+1}} S_\alpha^* \cap \gamma_{\beta_i}$, gibt es ein $\beta < \alpha$ mit $y \subseteq \overline{S_\alpha^* \cap \gamma_\beta}$, also $x \in \overline{S_\alpha^* \cap \gamma_\beta}$.

Es gilt $E_\alpha^\beta = \{\gamma_\delta : \delta \in S_\alpha \cap \beta\} = \{\gamma_\delta : \delta < \beta, \gamma_\delta \in S_\alpha^*\}$. Wir haben $x \in \overline{S_\alpha^* \cap \gamma_\beta} = \overline{E_\alpha^\beta}$ für ein $\beta < \alpha$. Aus $S_\alpha^* \subseteq D$ erhalten wir $\overline{S_\alpha^*} \subseteq \overline{D}$. Da $\overline{E_\alpha^\beta} \subseteq \overline{S_\alpha^*} \overset{\text{Monot., cl. guess.}}{\subseteq} \overline{D} \subseteq \gamma_{\eta^{+3}}$. Aus $E_\alpha^\beta \in M_{\beta+1}$ fold $\overline{E_\alpha^\beta} \in M_{\beta+1}$ nach den von M_0 geforderten Abschlusseigenschaften. Also ist $\overline{E_\alpha^\beta} \in M_{\beta+1}$ in η^{+4} beschränkt und wir erhalten $\overline{E_\alpha^\beta} \subseteq \gamma_{\beta+1}$. Wir haben also $x \in \overline{E_\alpha^\beta} \subseteq \gamma_{\beta+1}$.

Nun ist $\beta < \alpha$ und somit auch $\beta+1 < \alpha$, da $\operatorname{cf}(\alpha) = \eta^+$. Somit ist $\gamma_{\beta+1} < \gamma_\alpha$. Dies widerspricht der Wahl von x in (10.5).

$\dashv$

$\dashv$

Somit ist schließlich der Satz in der Kapitelüberschrift bewiesen.

10.1 Übungen

Übung 10.1. Sei a eine Menge regulärer Kardinalzahlen, und sei $|a|^+ < \min(a)$.

1. Sei λ eine Kardinalzahl. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\lambda = \max\big(\operatorname{pcf}(a)\big)$.

   (b) $\lambda = \operatorname{tcf}\Big(\prod a/J_{<\lambda}(a)\Big)$.

   (c) $\lambda = \operatorname{cf}\Big(\prod a/J_{<\lambda}(a)\Big)$.

   Sei $F \subseteq \mathscr{P}(a)$ ein Filter. Wir definieren

$$\operatorname{pcf}_F(a) = \Big\{\operatorname{cf}\big(\prod a/D\big) : D \text{ ist ein Ultrafilter über } a, F \subseteq D\Big\}$$

2. Hat $\operatorname{pcf}_F(a)$ ein Maximum?

3. Wir hatten $\max\big(\operatorname{pcf}(a)\big) = \operatorname{cf}\big(\prod a/\{\emptyset\}\big)$. Gibt es eine analoge Gleichung für $\max\big(\operatorname{pcf}_F(a)\big)$?

Durch die Gleichungen $\chi_N = \max\{f^{\lambda_i}_{\varrho_i} : i \leq n\}$ zeigen wir im Beweis des Satzes „$\max(\operatorname{pcf}(a)) = |\prod a|$", dass es wenige χ_N gibt. Das folgende Beispiel soll in einer einfachen Situation zeigen, dass das punktweise Maximum eine Funktion mit großen Werten sein kann:

4. Sei $\operatorname{id} : \omega \to \omega$, $\operatorname{id}(n) := n$.

   (a) Zeigen Sie:

$$(\forall g : \omega \to \omega)(\exists f_0, f_1 : \omega \to \omega)\big(\operatorname{id} \not\leq^* f_i \ \wedge\ \max(f_0, f_1) \geq g\big)$$

   (b) Zeigen Sie weiter, dass man die beiden f_i's monoton wachsend wählen kann.

Übung 10.2. Zeigen Sie: Falls $N_0 \prec H(\theta)$, $N_1 \prec H(\theta)$, und $N_0 \subseteq N_1$, so gilt $N_0 \prec N_1$.

Übung 10.3. Falls $N_0 \prec N_1 \prec H(\theta)$, $N_0 \in N_1$, $\eta^+ < \theta$, $N_0 \models \eta$ Kardinalzahl, und $\operatorname{cf}(\eta) > |N_0|$, dann $N_1 \models \exists x \in \eta \setminus \sup(N_0 \cap \eta)$.

Übung 10.4. Sei N sonnig mit Zeugen a und $\langle N_i : i < |a|^+\rangle$, $H(\theta)$. Sei $\eta \in N_0$, $\eta^+ < \theta$, $\operatorname{cf}(\eta) > |N_0|$, (letzteres gilt in $\mathbf{V}$, in $H(\theta)$ und in N_i, $i \geq 1$). Dann ist $\{\sup(N_i \cap \eta) : i < |a|^+\}$ club in $\sup(N \cap \eta)$. (Dies wurde in der Vorlesung am 10.12.2012 behauptet und im Beweis benutzt.)

Übung 10.5. Sei $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Berechnen Sie unter dieser Annahme $\aleph_n^{\aleph_0}$ für jedes $n \in \omega$.

Übung 10.6. Sei κ eine reguläre unendliche Kardinalzahl, und sei $\mu \geq \kappa$ eine Kardinalzahl.

Wir erinnern an eine weit verbreitete Notation:

$$[\mu]^\kappa := \{A \subseteq \mu : |A| = \kappa\}$$

Wir betrachten die Halbordung $H := ([\mu]^\kappa, \subseteq)$. Sei C konfinal in H, und $|C| = \operatorname{cf}(H)$.

a) Wann ist C einelementig?

b) Vergleichen Sie $|[\mu]^\kappa|$ und $2^\kappa \cdot \operatorname{cf}(H)$
Hinweis: Bauen Sie $[\mu]^\kappa$ aus einem konfinalen C.

c) Zeigen Sie: Es gibt κ^+ paarweise disjunkte Mengen $X \in [\mu]^\kappa$.
Folgern Sie hieraus: $([\mu]^\kappa, \leq)$ ist nicht κ^{++}-gerichtet.

d) Ist $([\mu]^\kappa, \leq)$ κ^+-gerichtet?

e) Zeigen Sie: $\operatorname{tcf}(H)$ existiert gdw $\operatorname{cf}(H) = \kappa^+$.

Übung 10.7. Zeigen Sie: $\exists x \subseteq \omega (x \notin I \wedge x \setminus \omega \notin I) \implies I$ ist nicht maximal.

Übung 10.8. Es gibt so ein x aus Übung 10.7. (Es folgt, dass I nicht maximal ist.)
Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Bijektion $f : \omega \to \omega \times \omega$.

Übung 10.9. Verallgemeinern Sie Übung 10.8 zu:
Sei U ein freier Ultrafilter auf κ, $\kappa > \omega$ regulär. Dann hat U keine Basis der Größe $\leq \kappa$.
($B \subseteq U$ heißt Basis, g.d.w $\forall x \in U \exists y \in B y \subseteq x$.)

Übung 10.10. Sei $a = \{\aleph_n : n > 1\}$, und sei $\operatorname{pcf}(a) = a \cup \{\aleph_{\omega+k} : 1 \leq k \leq n\}$ für ein $n \in \omega \setminus \{0\}$. (Dies ist konsistent relativ zu ZFC). Sei $\mathrm{FIN}_a = \{x \subseteq a : x \text{ endlich}\}$.

a) $\mathrm{FIN}_a \subseteq J_{<\aleph_{\omega+1}}(a)$.

b) $J_{<\aleph_{\omega+n}}(a)$ ist ein echtes Ideal aber kein maximales echtes Ideal.
Hinweis: $a \cong \omega$.

Übung 10.11. Wir definieren für ein Ideal $I \subseteq \mathscr{P}(a)$
$I^+ := \{x \subseteq a : x \notin I\}$, die Menge der I-positiven Mengen, und
$I^* := \{x \subseteq a : a \setminus x \in I\}$, den zu I dualen Filter.

Sei für $\lambda \in b$ $I_\lambda \subseteq \mathscr{P}(a)$ ein Ideal auf a. Sei I_{λ^*} ein Ideal auf b.
Wir definieren im Beweis des Lemmas 4.17 („über $\operatorname{pcf}(\operatorname{pcf}(a)) = \operatorname{pcf}(a)$”) das Ideal:

$$I = \{x \subseteq a : \{\lambda \in b : x \notin I_\lambda\} \in I_{\lambda^*}\}.$$

Sind die folgende Mengen auch Ideale?

a) $\check{I} = \{x \subseteq a : \{\lambda \in b : x \in I_\lambda\} \in I^*_{\lambda^*}\}$.

b) $\hat{I} = \{x \subseteq a : \{\lambda \in b : x \in I_\lambda\} \in I^+_{\lambda^*}\}$.
Hinweis: Wir empfehlen, ein Beispiel zu betrachten. Sei

- $a = \omega \times \omega$,
- $b = \omega$,
- $I_n = \{x \subseteq \omega \times \omega : x_n \in \mathrm{FIN}\}$, wobei $x_n := \{m \in \omega : (n,m) \in x\}$,
- $I_{\lambda^*} = \mathrm{FIN}$.

Übung 10.12. Sei:

- $2^{|a|} < \min a$,
- $b = \mathrm{pcf}(a)$,
- $\lambda \in \mathrm{pcf}(b)$, mit Zeugen D_λ und einer aufsteigenden konfinalen Folge $\langle g_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$,
- $\forall \beta \in b (= \mathrm{pcf}(a))$ sei D_β ein Ultrafilter auf a und sei $\langle f^\beta_\alpha : \alpha \in \beta \rangle$ aufsteigend und $<_{D_\beta}$-konfinal,
- für alle $\delta \in \lambda$, $\alpha \in a$, $h_\delta(\alpha) := \sup\{f^\beta_{g_\delta(\beta)}(\alpha) : \beta \in b\}$.

Nun wollen wir zeigen: $\langle h_\delta : \delta \in \lambda \rangle$ ist konfinal in $<_D$ mit

$$D = \{x \subseteq a : \{\beta \in b : x \in D_\beta\} \in D_\lambda\},$$

und $\langle h_\delta : \delta \in \lambda \rangle$ kann zu einer $<_D$-aufsteigenden Folge ausgedünnt werden.

Sei nun $f \in \prod a$ gegeben. Zunächst nehmen wir für jedes $\beta \in b$ ein δ_β, so dass

$$f \leq_{D_\beta} f^\beta_{\delta_\beta},$$

also

$$A_\beta := \{\alpha \in a : f(\alpha) \leq f^\beta_{\delta_\beta}(\alpha)\} \in D_\beta. \tag{1}$$

Dann nehmen wir β_0, so dass

$$\langle \delta_\beta : \beta \in b \rangle \leq_{D_\lambda} g_{\beta_0},$$

also für $\beta_1 > \beta_0$,

$$B = \{\beta \in b : \delta_\beta \leq g_{\beta_1}(\beta)\} \in D_\lambda. \tag{2}$$

Zeigen Sie: Nun ist für $\beta_1 \geq \beta_0$,

$$A = \{\alpha \in a : f(\alpha) \leq h_{\beta_1}(\alpha)\} \in D.$$

Hinweis: Setzen Sie Gleichung (1) und Gleichung (2) zusammen.

Kapitel 11

Die Rolle von $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$

Definition 11.1. κ heißt starke Limeskardinalzahl, falls $\forall \mu < \kappa.\ 2^\mu < \kappa$.

Satz 11.2. a) $\aleph_\omega^{\aleph_0} \leq \max(\aleph_{\omega_4}, 2^{\aleph_0})$

b) *Wenn* $\aleph_{n_0 - 1} := 2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$*, dann* $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \max \mathrm{pcf}(a) < \aleph_{\omega_4}$ *für* $a = \{\aleph_k : k \in [n_0, \omega)\}$.

c) *Wenn* $\aleph_\omega$ *ein starker Limes ist, dann ist* $2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$.

Lemma 11.3. *Sei* κ *ein starker Limes, dann ist* $2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}$.

Beweis Wir müssen nur noch Teil c) beweisen. Die Beweise zu a) und b) sind in Satz 10.1.

Sei $\langle \kappa_i : i < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ konfinal. Wir bilden $f : 2^\kappa \hookrightarrow \prod_{i<\mathrm{cf}\,\kappa} 2^{\kappa_i}$. Für $a \subseteq \kappa$, setze $f(a) = (a \cap \kappa_i)_{i<\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Für $i < \mathrm{cf}(\kappa)$ sei $b_i : 2^{\kappa_i} \to \gamma_i < \kappa$ eine Injektion. Da κ ein starker Limes ist, gibt es solche b_i.

Wir bilden $\tilde{f} : 2^\kappa \to \prod_{i<\mathrm{cf}\,\kappa} \gamma_i \subseteq \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ mit $\tilde{f}(a) = (b_i(a \cap \kappa_i))_{i<\mathrm{cf}(\kappa)}$. Also ist $\tilde{f} : 2^\kappa \to \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}$ injektiv und bezeugt $2^\kappa \leq \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}$.

Für die Umkehrung betrachten wir

$$\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} \leq \kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$$

nach Hessenberg. $\dashv$

Beweis[Beweis des Satzes 11.2] Mit $\kappa = \aleph_\omega$, folgt „*b)* $\Rightarrow$ *c)*“ aus dem Lemma. $\dashv$

Satz 11.4 (von Julius/Gyula König)**.** *Seien* $\mu_i < \kappa_i$ *für* $i < I$*,* I *ist Menge. Dann*

$$\sum_{i \in I} \mu_i < \prod_{i \in I} \kappa_i$$

Beweis[Indirekter Beweis] Sei $f : \sum \mu_i = |\bigcup \mu_i \times i| \to \prod \kappa_i$ eine Funktion, angenommen es gilt

$$\prod \kappa_i \supseteq \{f(\beta) : \beta \in \bigcup_{i \in I} \mu_i \times \{i\}\}.$$

Wir finden ein $g \in \prod \kappa_i \setminus \{f(\beta) : \beta \in \bigcup_{i \in I} \mu_i \times \{i\}\}$. Definiere

$$g : I \to \mathbf{V},\ g \in \prod_{i \in I} \kappa_i,\ g(i) \in \kappa_i \setminus \{f(\beta)(i) : \beta \in \mu_i \times \{i\}\}.$$

Es gilt $g \neq f(\beta)$ für alle $\beta \in \bigcup_{i \in I} \mu_i \times \{i\}$, da für gegebenes β ein i existiert mit $\beta \in \mu_i$, daher $g(i) \neq f(\beta)(i)$. $\dashv$

Bemerkung 11.5 (Easton, 1970)**.** *[3] $F : \kappa \to 2^\kappa$ für κ regulär kann unter folgenden Nebenbedingungen „frei“ eingerichtet werden:*

- $\kappa \leq \kappa' \to 2^\kappa \leq 2^{\kappa'}$
- $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$

Satz 11.6. *Für alle unendlichen Kardinalzahlen κ ist $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$.*

Beweis Angenommen $\mathrm{cf}(2^\kappa) = \kappa$. Dann ist $2^\kappa = \sum_{i<\kappa} \mu_i$ mit $\mu_i < 2^\kappa$. Nach dem Satz von König gilt

$$\sum_{i<\kappa} \mu_i < \prod_{i<\kappa} 2^\kappa = (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa,$$

im Widerspruch zur Annahme. $\dashv$

11.1 Übungen

Übung 11.1. Definition: Für Ultrafilter U and V auf ω definieren wir $U \otimes V$ als

$$\Big\{X \subseteq \omega \times \omega : \big\{m \in \omega : \{n \in \omega : (m,n) \in X\} \in V\big\} \in U\Big\}.$$

Die Projektionen π_i für $i = 1,2$ sind gegeben durch $\pi_i \colon \omega \times \omega \to \omega$, $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$.

Zeigen Sie

a) $U \otimes V$ ist ein Ultrafilter auf $\omega \times \omega$.

b) $\{\pi_1{}''X : X \in U \otimes V\} = U$.

c) $\{\pi_2{}''X : X \in U \otimes V\} = V$.

d) Seien nun U und V freie Ultrafilter. Es gibt $A_n \in U \otimes V$, $n \in \omega$, so dass es kein $A \in U \otimes V$ gibt, so dass für alle n die Differenz $A \setminus A_n$ endlich ist. (Solch ein A hieße ein *Pseudoschnitt* der Folge $\langle A_n : n \in \omega \rangle$. Falls alle abzählbaren Folgen im Ultrafilter Pseudoschnitte im Ultrafilter haben, nennt man den Ultrafilter *P-Punkt*, P von proche - nah). Hinweis: Versuchen Sie es mit $A_n = [n, \omega) \times \omega$.

e) (Puritz 1972) Seien weiterhin U und V frei. $U \otimes V$ wird erzeugt von (d.h., ist die Menge der Obermengen von endlichen Schnitten aus)

$$\big\{A \times \omega : A \in U\big\} \cup \big\{\{(m,n) : m < f(n)\} : f : \omega \to \omega \text{ ist nicht beschränkt auf einer Menge in } V\big\}$$

Christian Puritz, Skies, constellations, monads, in: W.A.J. Luxemburg, A. Robinson (Eds.), Contributions to Non-Standard Analysis, in: Stud. Logic Found. Math., vol. 69, North-Holland, 1972, pp. 215—243.

Weitere Fragen (auf die man zumindest teilweise Antworten kennt): Gegeben U, V, wieviele Ultrafilter auf $\omega \times \omega$ gibt es, deren Projektionen gerade U und V sind? Wann gibt es nur einen solchen Ultrafilter?

Eine neuere Arbeit hierzu:
Andreas Blass, Homogeneous sets from several ultrafilters, Topology and its Applications 156 (2009) pp. 2581–2594,

und eine Arbeit aus den Anfängen der Untersuchungen spezieller Ultrafilter:
Maryvonne Daguenet, Rapport entre l'ensemble des ultrafiltres admettant un ultrafiltre donné pour image et l'ensemble des images de cet ultrafiltre, Comment. Math. Univ. Carolin. 16 (1975) pp. 99–113.

Kapitel 12

Kardinalzahlexponentiation oberhalb starker Kardinalzahlen

Definition 12.1. λ heißt starker Limes bzw. starke Limeskardinalzahl gdw. $\forall \alpha < \lambda.\ 2^\alpha < \lambda$.

Definition 12.2.(1) Für einen Ultrafilter $D \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$ definieren wir folgende Eigenschaften:

- D heißt *fein* oder *regulär*, wenn $\forall \alpha \in \lambda.\ \{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : \alpha \in x\} \in D$,
- D heißt *κ-vollständig*, wenn $\forall X_i, i < \gamma, \gamma < \kappa.\ (\forall i < \gamma.\ X_i \in D \to \bigcap_{i<\gamma} X_i \in D)$.

(2) Für ein reguläres $\lambda \geq \kappa$ heißt κ *λ-kompakt* gdw. es einen feinen κ-vollständigen Ultrafilter D über $\mathscr{P}_\kappa(\lambda) = \{x \subseteq \lambda : |x| < \kappa\}$ gibt.

(3) κ heißt *stark kompakt* gdw. für alle regulären Kardinalzahlen $\lambda \geq \kappa$ κ stark λ-kompakt ist.

Satz 12.3 (Solovay, 1974)**.** *[13] Sei κ stark kompakt. Dann gilt:*

1) $\forall \lambda \geq \kappa, \lambda$ regulär. $\lambda^{<\kappa} = \lambda$

2) $\forall \lambda \geq \kappa, \lambda, \alpha$ regulär. $2^\alpha < \lambda \to \lambda^\alpha = \lambda$

3) $\forall \lambda > \kappa, \lambda$ singulärer starker Limes. $2^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^+$

Definition 12.4. Sei D ein Ultrafilter über $I \in \mathbf{V}$. Seien $f, g : I \to \mathbf{V}$, dann definiere

$$f \sim_D g := \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen $f_{\sim_D} = \{g : g \sim_D f\}$.

Definition 12.5. Wir definieren die Scott-Menge $S_D(f) \subseteq f_{\sim_D}$:

$$S_D(f) := \{g : g \sim_D f \wedge \forall h \in \mathbf{V}.\ (h \sim_D f \to \mathrm{rk}(g) \leq \mathrm{rk}(h))\}$$

$S_D(f)$ ist eine Teilmenge von $V_{\mathrm{rk}(f)+1}$ und daher eine Menge.

Erinnerung 12.6. $\mathrm{rk}(x) = \min\{\alpha : x \in V_{\alpha+1}\}$.

Definition 12.7. $\mathbf{V}^I/D := \{S_D(f) : f : I \to \mathbf{V}\} \subseteq \mathbf{V}$ ist eine Klasse, enthält also nur Mengen.

Wegen $S_D(f) = S_D(g) \Leftrightarrow f \sim_D g = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D$ lässt sich auf $\mathbf{V}^I/D$ mit wörtlich gleichem „=“ rechnen wie auf $\mathbf{V}$. Nun wird ein E_D gesucht, das auf V^I/D elementar äquivalent zu $\in$ auf $\mathbf{V}$ ist.

Definition 12.8.

$$S_D(f)\ E_D\ S_D(g) := \{i \in I : f(i) \in g(i)\} \in D$$

Lemma 12.9. *E_D ist fundiert, wenn D ω_1-vollständig ist.*

Beweis Angenommen E_D wäre nicht fundiert, dann gibt es eine Folge $\langle f_n : n \in \omega\rangle$, so dass für alle n $f_{n+1}\ E_D\ f_n$ gilt, das heißt $A_n := \{i \in I : f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \in D$. Da D ω_1-vollständig ist, ist $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in D$. Weil D ein Ultrafilter ist, ist $\bigcap_{n\in\omega} A_n \neq \emptyset$.

Nun nehmen wir ein $i \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$ und erhalten $f_{n+1}(i) \in f_n(i)$ für alle $n \in \omega$, im Widerspruch zur Fundiertheit von $\in$. $\dashv$

Lemma 12.10. *E_D ist extensional, das heißt*

$$\left(V^I/D, E_D\right) \models \forall x, y.\ (\forall z.\ (zE_Dx \leftrightarrow zE_Dy) \to x = y)$$

Beweis Mit $\{i : \mathbf{V} \models \text{ Extensionalitätsgesetz}\} = I \in D$ folgt das Lemma aus dem Satz von Łoś. $\dashv$

Zitat 12.11 (Satz von Łoś). *Für alle $\theta \in \mathscr{L}(\in)$, für alle $f_0, \dots, f_{n+1} \in \mathbf{V}^I$:*

$$\left(\mathbf{V}^I/D, E_D\right) \models \theta(S_D(f_0), \dots, S_D(f_{n-1})) \ \Leftrightarrow\ \{i \in I : \mathbf{V} \models \theta(f_0(i), \dots, f_{n-1}(i))\} \in D$$

Notation 12.12. $\left(\mathbf{V}^{\mathscr{P}_\kappa(\lambda)}/D, E_D\right)$ *heißt ab jetzt (A, E).*

Satz 12.13 (Mostowski, 1949)**.** *Sei A eine „Struktur“, sowohl A als auch $E \subseteq A \times A$ können echte Klassen sein. Es gelte*

i) *E ist fundiert*

ii) *E ist extensional*

iii) *$\{x : xEa\}$ sei eine Menge für jedes $a \in A$. (mengenähnlich, vorgängerklein)*

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte transitive Klasse $M \subseteq \mathbf{V}$ und ein $\pi : (A, E) \cong (M, \in)$, wobei mit $\in$ gemeint ist: $\in \restriction M \times M$ mit $\in$ aus $\mathbf{V}$. Sowohl der Isomorphismus π als auch seine Bildklasse M heißen „Mostowski-Kollaps von $(A; E)$“.

Beweis[Beweis des Satzes von Mostowski durch transfinite Induktion über (A, E)] Nach i) und iii) ist die folgende Operation wohldefiniert:

$$\pi(x) = \{\pi(y) : yEx\} \quad \text{(Mostowski-Kollaps)}$$

π ist ein Isomorphismus:

- Setze $M := \pi''A$, daher ist π surjektiv.
- Wegen ii) ist π injektiv.
- π ist strukturerhaltend, also $yEx \Leftrightarrow \pi(y) \in \pi(x)$, nach der rekursiven Definition von π.

M ist eindeutig bestimmt und transitiv:

- Die Transitivität von M wird induktiv über $\in$ bewiesen: Sei $x \in M$, dann ist $x \subseteq M$ zu zeigen.

$$x \in M \Rightarrow x = \{\underbrace{\pi(y)}_{\in M} : yEx\} \subseteq M$$

- Transitive Strukturen sind starr, also wenn $(M, \in) \cong (M', \in)$, $(M, \in)$ und $(M', \in)$ beide transitiv sind, dann ist $M = M'$ und $\pi = \mathrm{id}$.

$\dashv$

Definition 12.14. Nehme $X \in \mathbf{V}$, dann setze

$$j(x) := j_D(x) := \pi_D(S_D(\langle \underbrace{x, x, \ldots, x}_{I} \rangle)),$$

wobei $\pi_D := \pi : \left(\mathbf{V}^{\mathscr{P}_\kappa(\lambda)}/D, E_D\right) \cong (M, \in)$. Es gilt $j : \mathbf{V} \to_{\text{el}} \mathbf{V}$.

Definition 12.15. Sei $f : I \to \mathbf{V}$, (hier $I = \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$), D ein Ultrafilter über I, dann setze $[f]_D = \pi_D \circ S_D(f)$.

Satz 12.16 (über die Abgeschlossenheitseigenschaften von M_D)**.** *Sei D ein ω_1-vollständiger Ultrafilter über I und M_D der Mostowski-Kollaps von $\left(V^I/D, E_D\right)$. Dann gelten*

a) *Falls $j''_D x \in M$, $y \subseteq M$ und $|y| \leq |x|$, so ist $y \in M$.*

b) $j''|I|^+ \notin M$

Beweis

a) Da $y \subseteq M$, ist jedes Element von y als $[y']_D$ darstellbar. Wir haben eine Funktion $t : x \to y$ in $\mathbf{V}$, so dass gilt

$$y = \{[t_a]_D : a \in x\}$$

t_a steht hierbei abkürzend für $t(a)$.

Wir nehmen $T \in \mathbf{V}$, $T : j''_d x \to y$, $T(j(a)) := [t_a]_D$.

Behauptung. $T \in M$

Beweis Wir behaupten es existiert ein g, so dass $[g]_D = T$. Wir setzen $[g]_D(j(a)) = [t_a]_D$ bzw. $g(i)(j(a)) = t_a(i)$, wobei $g(i) : j''_D x \to \mathbf{V}$. Dann ist $\{i : g(i)(j(a)) = t_a(i)\} \in D$.

Daraus folgt $[g](j(a)) = [t_a]$ und damit $[g] = T$, da für alle $a \in x$ $[g](j(a)) = T(j(a))$ ⊣
Aus $T \in M$ folgt $\mathrm{rge}(T) \in M$.

b) Angenommen $j''|I|^+ = [g]_D \in M$, $g : I \to \mathbf{V}$.

- 1. Fall: $A := \{i \in I : |g(i)| \leq |I|\} \in D$. Dann existiert ein

$$\alpha \in I^+ \setminus \bigcup \{ \underbrace{g(i)}_{|g(i)| \leq |I|} : i \in \underbrace{A}_{A \subseteq I} \}$$

  Damit ist $j(\alpha) \notin [g]$, da $\forall i.\ g(i) \not\ni \alpha$ für $\alpha \in |I|^+$.

- 2. Fall $B := \{i \in I : |g(i)| \geq |I|^+\} \in D$. Sei $<_I$ eine Wohlordnung auf I. Wir definieren induktiv $h : I \to \mathbf{V}$ über $<_I$ für $i \in B$:

$$h(i) \in g(i) \setminus \{h(j) : j < i, j \in B\}$$

  Dann ist $h \notin j''|I|^+$, da in $j''|I|^+$ nur Elemente des Typs $\langle \alpha, \alpha, \ldots \rangle_{/D}$ für $\alpha \in |I|^+$ stehen. h ist auf $B \subseteq D$ injektiv, also gibt es kein $C \in D$ mit $C \subseteq B$, so dass $h \restriction C \equiv \alpha$

⊣

Das folgende Lemma geht laut Solovay [13] auf Ketonen [7] zurück:

Lemma 12.17. *[7] Seien λ, κ regulär, $\lambda \geq \kappa$, $[F]_D$ die in M_D kleinste Funktion mit $[F]_D > j(\xi)$ für alle $\xi < \lambda$ und $[F]_D < j(\lambda)$. Ohne Einschränkung ist $[F]_D = \langle x \mapsto F(x) \in \lambda : x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \rangle$.*

Dann gibt es $\langle A_\xi : \xi < \lambda \rangle$, so dass $A_\xi \subseteq \xi$, $|A_\xi| \leq \mathrm{cf}(\xi)$ und $\forall \eta \in \lambda.\ \{x : \eta \in A_{F(x)}\} \in D$.

Beweis Sei für $\xi < \lambda$, $A_\xi \subseteq \xi$ und $|A_\xi| \leq \mathrm{cf}(\xi)$, A_ξ konfinal in ξ. $A_{F(x)} \subseteq F(x)$ für $x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ und $|A_{F(x)}| \leq \mathrm{cf}(F(x))$ und $A_{F(x)}$ ist konfinal in $[F]$. Nun definieren wir ξ_η für $\eta < \lambda$ induktiv:

- Induktionsanfang: $\xi_0 = \emptyset$
- Limesschritt: $\xi_n := \sup_{\eta' < \eta}(\xi_{\eta'} + 1)$ für $\eta < \lambda$, η limes.
- Nachfolgerschritt: Wähle $\xi_{\eta+1}$ minimal, so dass

$$M \models [A_F] \cap [\xi_\eta, \xi_{\eta+1}) \neq \emptyset.$$

Um die Notation zu vereinfachen setze $I_\eta := [\xi_\eta, \xi_{\eta+1})$. Definiere nun $X_\eta := \{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : A_{F(x)} \cap I_\eta \neq \emptyset\} \in D$. Definiere $\xi^{-1} : \lambda \to \lambda$, $\alpha \mapsto \eta$ falls $\alpha \in [\xi_\eta, \xi_{\eta+1})$.

Wir setzen $F'(x) := \xi^{-1} F(x)$. Dann ist $F'(x) \leq F(x)$ für alle $x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.

- Im ersten Fall sei $F' =_D F$. Dann folgt aus $X_\eta \in D$ für jedes $\eta \in \lambda$ $\{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : \eta \in A_{F(x)}\} \in D$.

- 2. Fall: Da F die kleinste Funktion $>j(\xi)$ ist, gilt

$$\exists \eta_0 \in \lambda.\ F' \leq_D \eta_0 \wedge \{x : F'(x) \subseteq \eta_0\} \in D.$$

  Da $F = \xi_{F'}$, ist $\{x : F(x) \subseteq \xi_{\eta_0}\} \in D$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $[F] > j(\xi)$, $\xi \in \lambda$.

$\dashv$

Behauptung 12.18. *Im Fall einer λ-kompakten Kardinalzahl κ gibt es ein F wie in Lemma 12.17.*

Beweis Sei D ein feiner κ-vollständiger Ultrafilter über $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Wir setzen $G(x) = \sup(x)$ für $x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Dann ist $j(\lambda) > [G]_D \geq \sup\{j(\xi) : \xi < \lambda\}$. Dass D fein ist, bedeutet für alle $\xi \in \lambda$ $\{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : \xi \in x\} \in D$, daher ist $\{x : \sup(x) \geq \xi\} \in D$. Nach dem Satz von Łoś ist $[G] < j(\lambda)$. Wir wenden Lemma 12.17 an und erhalten $[F]_D$ und $\langle A_\xi : \xi < \lambda \rangle$ wie dort. $\dashv$

Lemma 12.19. $\{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : \mathrm{cf}(F(x)) < \kappa\} \in D$

Beweis Setze $H : \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda$, $H(x) = \sup(\underbrace{F(x)}_{\in\lambda} \cap x) \leq F(x)$. $H =_D F$, da F minimal $\geq j(\xi)$ für alle $\xi \in \lambda$ ist und auch $\{x : H(x) > \xi\} \in D$ für alle $\xi \in \lambda$, da D fein ist, $\{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : \mathrm{cf}(H(x)) < \kappa\} \in D$. $\dashv$

Lemma 12.20. *Sei κ λ-kompakt, λ regulär. Dann ist $\lambda^{<\kappa} = \lambda$.*

Beweis Seien A, F wie oben.

Behauptung. $\mathscr{P}_\kappa(\lambda) = W := \bigcup\{\mathscr{P}(A_\xi) : \xi < \lambda, \mathrm{cf}(\xi) < \kappa\}$.

Beweis

„$\supseteq$“: Wir hatten $A_\xi \subseteq \xi$ und $|A| \leq \mathrm{cf}(\xi)$. Für ξ mit $\mathrm{cf}(\xi) < \kappa$ ist daher $A_\xi \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Für alle $y \in \mathscr{P}(A_\xi)$ ist $|y| < \kappa$, also ist für alle $y \in W$ $|y| < \kappa$.

„$\subseteq$“: Sei $\eta \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Für $\xi \in x$ ist (nach den Eigenschaften von $\langle A_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ und F aus Lemma 12.17) $\{x : \eta \in A_{F(x)}\} \in D$. Da D $<\kappa$-vollständig ist, ist $\bigcap_{\eta \in x}\{x : \eta \in A_{F(y)}\} \in D$. Es gilt

$$\bigcap_{\eta \in x}\{y : \eta \in A_{F(y)}\} = \{y : x \subseteq A_{F(y)}\} \in D$$

Wir haben $\{y : \mathrm{cf}(F(y)) < \kappa\} \in D$. Wir nehmen ein y, so dass $\mathrm{cf}(F(y)) < \kappa$ und $x \subseteq A_{F(x)}$. Setze $F(y) =: \xi < \lambda$, also gilt für ξ: $\mathrm{cf}(\xi) < \kappa$, $\xi < \lambda$ und $x \subseteq A_\xi$ bzw. $x \in \mathscr{P}(A_\xi)$.

$\dashv$

Es gilt

$$|W| = \lambda \cdot \sup\{|\mathscr{P}(A_\xi)| : \xi < \lambda, \mathrm{cf}(\xi) < \kappa\},$$

wobei $|\mathscr{P}(A_\xi)| \leq 2^{\mathrm{cf}(\xi)} < \kappa$, da κ stark unerreichbar. $\dashv$

Dies zeigt Teil 1) des Satzes von Solovay (12.3).

Behauptung 12.21. *Messbare Kardinalzahlen sind stark unerreichbar.*

Beweis Sei U ein κ-vollständiger Ultrafilter, $U \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$.

Wir zeigen: κ ist ein starker Limes. Sei $\kappa \leq 2^\mu$, $\mu < \kappa$. Sei $g\colon A \to \kappa$ bijektiv, $A \subseteq 2^\mu$. Dann ist für jedes $\alpha \in \mu$ für ein $i_\alpha \in \{0,1\}$ die Menge $X_{\alpha,i_\alpha} = \{\beta \in \kappa : g^{-1}(\beta)(\alpha) = i\} \in U$. Aber $\bigcap_{\alpha\in\mu} X_{\alpha,i}$ hat nur ein Element $g(a)$ mit einem $a = \langle i_\alpha : \alpha \in \mu\rangle \in A \subseteq 2^\mu$ oder kein Element. Daher ist U nicht κ-vollständig.

Wir zeigen: κ ist regulär. Falls $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, widerlegt man die κ-Vollständigkeit mit einem Schnitt aus $\mathrm{cf}(\kappa)$ vielen Endabschnitten. $\dashv$

Lemma 12.22. *Seien κ, α, λ reguläre Kardinalzahlen und $\kappa, \alpha \leq \lambda$. Sei κ λ-kompakt, und sei $2^\alpha < \lambda$. Dann ist $\lambda^\alpha = \lambda$.*

Beweis Für $\alpha < \kappa$ folgt die Behauptung aus Lemma 12.20. Für $\alpha \geq \kappa$ betrachten wir erst das folgende Lemma. $\dashv$

Lemma 12.23. *Seien κ, α, λ reguläre Kardinalzahlen und $\kappa \leq \alpha \leq \lambda$. Sei κ λ-kompakt und sei $2^\alpha < \lambda$. Dann gilt:*

(1) $2^\alpha < j(\kappa) \leq j(\alpha) < (2^\alpha)^+ \leq \lambda$.

(2) Für $w \subseteq M$ gilt: Falls $|w| \leq \alpha$, so $(\exists y \in M)(w \subseteq y \wedge |y| \leq 2^\alpha \wedge M \models |y| \leq j(\kappa))$,

(3) Falls $w \subseteq \lambda$, dann gibt es ein y wie in (2), so dass zusätzlich $y \subseteq \lambda$.

Beweis (1) Wir rechnen in $\mathscr{P}_\kappa(\alpha) =: X$. Sei D^α ein feiner κ-vollständiger Ultrafilter über $\mathscr{P}_\kappa(\alpha)$.

So ein D gibt es: Sei U ein feiner κ-vollständiger Ultrafilter uber $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Wir setzen für $Y \subseteq \mathscr{P}_\kappa(\alpha)$,

$$Y \in D \leftrightarrow \{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : x \cap \alpha \in Y\} \in U.$$

Wir zeigen zuerst $j(\alpha) < (2^\alpha)^+$: Nach Lemma 12.20 ist $|\mathscr{P}_\kappa(\alpha)| = \alpha$. Wir haben also

$$(\pi_D)^{-1}\colon j(\alpha) \cong \alpha^X/D.$$

Daher ist $|j(\alpha)| \leq |\alpha^X| = \alpha^\alpha = 2^\alpha$. Nach dem Satz von Łoś ist $j(\alpha)$ eine Ordinalzahl. Somit ist $j(\alpha) < (2^\alpha)^+$.

Wir zeigen nun $2^\alpha < j(\kappa)$. Da κ ein starker Limes ist, ist für $x \in \mathscr{P}_\kappa(\alpha)$, $|\mathscr{P}(x)| < \kappa$. Da $\mathscr{P}_\kappa(\alpha) \in D$, gibt es nach dem Satz von Łoś in M eine Bijektion von $\langle \mathscr{P}(x) : x \in X\rangle/D$ auf eine Kardinalzahl $\mu < j(\kappa)$.

Wir bilden $\mathscr{P}(\alpha)$ durch $i(A) = \langle A \cap x : x \in \mathscr{P}_\kappa(\alpha)\rangle$ injektiv in $\prod_{x \in X} \mathscr{P}(x)/D$ ein. Da D fein ist, ist i injektiv. Insgesamt ist also $|2^\alpha| \leq |\prod_{x\in X} \mathscr{P}(x)/D| < j(\kappa)$ in V.

(2) Sei $w = \{a_\gamma : \gamma \in \alpha\} \subseteq M$. Sei $a_\gamma = \langle a_\gamma(x) : x \in X\rangle/D \in M$. Wir setzen $y_x = \{a_\gamma(x) : \gamma \in x\}$. Dann ist $\{x : \gamma \in x\} \in D$, und daher ist die Obermenge $\{x : a_\gamma(x) \in y_x\} \supseteq \{x \in : \gamma \in x\}$ auch in D. Mit dem Satz von Łoś folgt $M \models a_\gamma \in y$ für jedes $\gamma \in \alpha$, und daher und $M \models w \subseteq y$.

(3) Wir nehmen den Beweis von (2) mit $a_\gamma(x) \in \lambda$ für jedes $\gamma \in \alpha$, $x \in X$. $\dashv$

Beweis[Beweis zu Lemma 12.22] λ ist auch regulär in M, da $M \subseteq V$. Nach Lemma 12.23 ist $j(\kappa) < \lambda$, da wir α und $(2^\alpha)^+$ wie in jenem Lemma dazwischensetzen können. Da $j \colon V \to M$ eine elementare Einbettung ist, gilt in M:

$$M \models j(\kappa) \text{ ist stark } j(\lambda)\text{-kompakt}.$$

Wie oben folgt hieraus

$$M \models j(\kappa) \text{ ist stark } \lambda\text{-kompakt}.$$

Also gilt nach Lemma 12.20,

$$M \models \lambda^{<j(\kappa)} = \lambda.$$

Nun sei $x \subseteq \lambda$, $|x| = \alpha$. Nach Lemma 12.23 Teil (2) und (3) gibt es ein $y_x \in M$, so dass $x \subseteq y_x$ und $|y_x| \leq 2^\alpha$. Somit ist $|y_x| < j(\kappa)$ und $y_x \subseteq \lambda$. Wir fassen alle y_x in eine Menge und erhalten zusammen mit der vorigen gesetzten Gleichung

$$M \models |\{y_x : x \in \mathscr{P}_{=\alpha}(\lambda)\}| \leq \lambda^{<j(\kappa)} = \lambda.$$

Wir lesen hieraus in $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} \models |\{y_x : x \in \mathscr{P}_{=\alpha}(\lambda)\}| \leq \lambda.$$

Für jedes $y \in \lambda^{j(\kappa)}$ ist die Menge $\{x \in \mathscr{P}_{=\alpha}(\lambda) : y_x = y\}$ von Mächtigkeit $\leq |\mathscr{P}_{=\alpha}(y)|$ also $\leq (2^\alpha)^\alpha < \lambda$. Nun lesen wir die gesetzte Gleichung in V, und erhalten aus der eben gezeigten $< \lambda$-zu-eins Eigenschaft von $x \mapsto y_x$:

$$V \models |\mathscr{P}_{=\alpha}(\lambda)| \leq \lambda.$$

$\dashv$

Beweis[Beweis von Teil 3) des Satzes von Solovay (12.3)] Zu zeigen ist: Oberhalb von κ gilt SCH. Sei $\lambda = \lim_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_i \geq \kappa$ eine singuläre starke Limeszahl. Wir haben $2^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$ früher gezeigt. Nach dem Satz von Julius König (11.4) ist $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \geq \lambda^+$. Andrerseits ist $(\lambda^+)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^+$, da $2^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \lambda < \lambda^+$ und da wir also Lemma 12.22 für $\alpha = \mathrm{cf}(\lambda)$ und λ^+ (anstelle von λ dort) anwenden können. Daher ist $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq (\lambda^+)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^+$, und zusammen mit der König'schen Abschätzung nach unten folgt die Gleichheit. $\dashv$

Literaturverzeichnis

[1] Uri Abraham and Menachem Magidor. Cardinal arithmetic. In Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, editors, *Handbook of Set Theory*. Springer, 2010.

[2] Maxim Burke and Menachem Magidor. Shelah's pcf theory and its applications. *Ann. Pure Appl. Logic*, 50:207–254, 1990.

[3] William B. Easton. Powers of regular cardinals. *Ann. Math. Logic*, 1:139–178, 1970.

[4] Moti Gitik and Menachem Magidor. The singular cardinal hypothesis revisited. In *Set theory of the continuum (Berkeley, CA, 1989)*, volume 26 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 243–279. Springer, New York, 1992.

[5] Michael Holz, Karsten Steffens, and Edmund Weitz. *Introduction to Cardinal Arithmetic*. Birkhäuser, 1999.

[6] Thomas Jech. *Set Theory. The Third Millenium Edition, revised and expanded*. Springer, 2003.

[7] Jussi Ketonen. Strong compactness and other cardinal sins. *Ann. Math. Logic*, 5:47–76, 1972/73.

[8] Menachem Kojman. The A, B, C of pcf: A companion to pcf theory, part I. see http://www.math.bgu.ac.il/˜kojman, 1995.

[9] Menachem Magidor. On the singular cardinals problem I. *Israel J. Math.*, 28:1–31, 1977.

[10] Menachem Magidor. On the singular cardinals problem II. *Israel J. Math.*, 106:517–647, 1977.

[11] Saharon Shelah. *Cardinal Arithmetic*, volume 29 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, 1994.

[12] Robert Solovay. Real-valued measurable cardinals. In Dana Scott, editor, *Axiomatic Set Theory*, volume 13, Part 1 of *Proc. Symp. Pure Math*, pages 331–355. American Mathematical Society, 1971.

[13] Robert M. Solovay. Strongly compact cardinals and the GCH. In *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV,*

Univ. California, Berkeley, Calif., 1971), pages 365–372, Providence, R.I., 1974. Amer. Math. Soc.

[14] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A course in model theory*, volume 40 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA, 2012.

[15] Stevo Todorčević. Partitioning pairs of countable ordinals. *Acta Math.*, 159(3-4):261–294, 1987.

[16] Jan Tryba. On Jónsson cardinals with uncountable cofinality. *Israel J. Math.*, 49(4):315–324, 1984.

Index