Mengenlehre: das konstruktible Universum — Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
WS 2016/17 — Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz
Übungen

BLATT 10

10.01.2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei α eine Limesordinalzahl und $\beta \geq 2$ sei eine Kardinalzahl. Sei $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_{\beta}$. Dies heißt:

$$\forall f : [\kappa]^{<\omega} \to \beta \, \exists H \subseteq \kappa (\mathrm{otp}(H) = \alpha \wedge \forall n |f''[H]^n| = 1)$$

Zeigen Sie: $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_{\beta^\omega}$.

Hinweis: Sei $b : \omega \to \omega \times \omega$ bijektiv, so dass $\forall n, i, j (b(n) = (i,j) \to i \leq n)$. Wir schreiben $i = b_1(n), j = b_2(n)$ für $(i,j) = b(n)$. Sei $f : [\kappa]^{<\omega} \to \beta^\omega$ gegeben. Wir definieren eine Hilfsfärbung $g : [\kappa]^{<\omega} \to \beta$ durch $\forall n \forall \gamma_1 < \cdots < \gamma_n \in \kappa : g(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = f(\gamma_1, \dots, \gamma_{b_1(n)})(b_2(n))$. Nach Voraussetzung gibt es eine homogene Menge H für g, das heißt $\mathrm{otp}(H) = \alpha \wedge \forall n |g''[H]^n| = 1$. Argumentieren Sie, dass H auch für f homogen ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass

$$2^\omega \nrightarrow (\omega_1)^2_2.$$

Hinweis: Betrachten Sie die reellen Zahlen. Kann man ω_1 oder ω_1^* einbetten? ω_1^* soll die gespiegelte Wohlordnung sein: $\omega_1^* = \{-\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ und $-\alpha <_{\omega_1^*} -\beta \leftrightarrow \alpha > \beta$.
Ohne Bepunktung, für Experten: Gilt $(2^\omega)^+ \to (\omega_1)^2_2$? Schauen Sie sich zum Beispiel die Ziegler'sche Moldelltheorievorlesung an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie: Sei U ein Ultrafilter über einer Menge S. Wenn $\mathrm{Ult}_U(V)$ fundiert ist, wird jede Ordinalzahl α durch eine Äquivalenzklasse $[f]$ mit einer Funktion $f \colon S \to \mathrm{On}$ dargestellt.

Gilt Analoges dies auch für den Mostowski-Kollaps $M = \pi''\mathrm{Ult}_U(V)$? Das heißt, wir suchen jetzt eine Darstellung der Form $\pi([f])$ mit einem $f \colon S \to \mathrm{On}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(A, <_A)$ ein κ-Aronszajnbaum mit $A \subseteq \kappa^{<\kappa}$ und $<_A = \subsetneq$. Mit $s \wedge t$ bezeichnen wir das $<_A$-größte Element r, so dass $(r \leq_A s \wedge r \leq_A t)$. $s \wedge t$ heißt das Minimum von s und t im Baum. Wir *plätten* $(A, <_A)$, das heißt wir definieren daraus die folgende Relation:

$$s <_L t :\Leftrightarrow \big(s <_A t \text{ oder } (r = s \wedge t \text{ und } \exists \alpha < \beta \in \kappa (r^\frown\alpha \subseteq s \wedge r^\frown\beta \subseteq t))\big)$$

Hierbei steht die Konkatenation als Abkürzung: $r^\frown\alpha = r \cup \{(\mathrm{dom}(r), \alpha)\}$.
Ist $(A, <_L)$ eine lineare Ordnung?

Bemerkung $(A, <_L)$ heißt **Aronszajn-Typ**. Wenn $\kappa = \omega_1$, ist dies eine überabzahlbare lineare Ordnung, in die man weder ω_1 noch ω_1^* noch $\mathbb{R}$ einbetten kann. Wenn man einen ω_1-Souslin-Baum $S \subseteq \omega_1^{<\omega_1}$ plättet, erhält man eine **Souslinordnung** oder **Souslin line**.

Abgabe bis Dienstag 17.01.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur