Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 12

24.01.2017

Aufgabe 1. Seien $\psi(z, y_1, \ldots, y_n)$ und $\xi_i(y_i, \bar{x})$, $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{L}(\in)$-Formeln. Gibt es eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel χ, so dass

$$\forall x_1, \ldots, x_k \; h_\psi(h_{\xi_1}(\bar{x}), \ldots, h_{\xi_n}(\bar{x})) = h_\chi(\bar{x})?$$

Aufgabe 2. Sei κ messbar, und sei U ein normaler, freier Ultrafilter über κ. Ist κ dann ω_1-Erdős?

Hinweis: Zeigen sie: $\kappa \to (\kappa)_2^{<\omega}$. Induktiv über $n \geq 1$ zeigt man

$$\forall f \colon [\kappa]^n \to 2 \exists H \subseteq U |f''[H]^n| = 1.$$

Warum genügt das?

Beim Induktionsschritt $f \colon [\kappa]^{n+1} \to 2$ betrachtet man die Hilfsfärbung für $\alpha \in \kappa$:

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon [\kappa \setminus (\alpha+1)]^n &\to 2 \\ (\beta_1, \ldots, \beta_n) &\mapsto f(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) \end{aligned}$$

Ist die Diagonalschnitt aus homogenen Mengen H_α für f_α schon homogen für f?
Wie kann man nachbessern?

Aufgabe 3. Für $\alpha < \omega_1$ seien X_α und γ_α wie in der Vorlesung definiert. Sei $\pi_{\alpha,\beta}$ die Mostowski Kollaps von $M_{\alpha,\beta} = H^{L_\kappa}(\gamma_\alpha \cup X_\beta)$, und sei $i_{\alpha,\beta} := \pi_{\alpha,\beta}^{-1}$. Sei π_α der Mostowski Kollaps von $M_\alpha = H^{L_\kappa}(\gamma \cup X_\alpha)$, und sei $i_\alpha = \pi_\alpha^{-1}$. Seien $\alpha < \beta < \omega_1$. Gilt dann

$$i_{\alpha,\beta} = i_\alpha^{-1} \circ i_\beta?$$

Aufgabe 4. Sei κ (in V) eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl.
Zeigen Sie: Wenn $0^\sharp$ existiert, so ist die Club-Filter auf κ,

$$C_\kappa := \{x \subseteq \kappa : x \in V, \exists c (c \subseteq x \wedge c \text{ Club in } \kappa)\},$$

Obermenge eines L-Ultrafilters.

Hinweis: Sei $x \in L$, $x \subseteq \kappa$, $x = t(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ mit $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \bar{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ Silver Indiscernible aus I und $\alpha_n < \kappa \leq \beta_1$. Betrachten Sie $\gamma \in t(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ für $\alpha_n < \gamma < \kappa$ und $\gamma \in I$.

BONUS (2 Punkte). Sei κ eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl, und sei $D = C_\kappa \cap \mathcal{P}^L(\kappa)$ ein L-Ultrafilter. Zeigen Sie: Dann existiert $0^\sharp$.

Hinweis: Die Ultrapotenz $Ult_D(L)$ ist fundiert und $L \to_{el} Ult_D(L)$ ist nicht trivial.

Abgabe bis Dienstag 31.01.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur