Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 2

01.11.2016

Aufgabe 1. a) Gibt es ein x, so dass $\{x\}$ nicht transitiv ist?

b) Finden sie ein nicht transitives M und eine Δ_0-Formel ϕ(mit Parametern aus M), so dass $M \models \phi$ und $V \models \neg\phi$.

Aufgabe 2. Sei $R \subseteq a \times a$ eine fundierte Relation auf einer Menge a, d. h. $\forall b \subseteq a(b \neq \emptyset \to \exists c \in b \forall d \in b(\neg dRc))$ (jede nicht leere Teilmenge von a hat ein R-minimales Element). Wir definieren rekursiv über die Ordinalzahlen die Mengen r_α folgenderweise:

$$r_0 := \{x \in a : x \text{ ist ein R-minimales Element von } a\}$$
$$r_\alpha := \{x \in a : \forall y(yRx \to \exists \beta < \alpha(y \in r_\beta))\}$$

Ist diese Rekursion wohldefiniert?
Hinweis: Auf welches G wendet man der Rekursionssatz an, so dass man ein F erhält mit $F(\alpha) = r_\alpha$?

Aufgabe 3. Sei (a, R) eine fundierte Relation wie in der vorherigen Übung. Man nennt $\mathrm{rk}(x) := \min\{\alpha : x \in r_\alpha\}$ den R-Rang von x in (a, R).
Es gebe $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq a$, so dass $\forall \alpha, \beta < \gamma$:

$$\alpha < \beta \to x_\alpha R x_\beta$$

Können Sie den R-Rang von x_α nach unten abschätzen? Geben Sie eine möglichst große Untergrenze.

Aufgabe 4. Seien $M \subseteq V$, M transitiv, $M \models ZFC$ und $V \models ZFC$. Seien $L \in M$ eine endliche Symbolmenge, $\mathfrak{A} \in M$ eine L-Struktur, $\phi(x)$ eine L-Formel und $a \in A$. Beweisen Sie, dass

$$(\mathfrak{A} \models \phi[a])^M \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \phi[a])^V$$

Hinweis: Versuchen Sie, z.B. den Quantorenschritt $\phi(x) = \exists y \psi(x, y)$ zu analysieren. Wo werden die Existenzbeispiele gesucht? Bemerken Sie auch, dass aus der Transitivität folgt $A \cap M = A$.

Aufgabe 5 (BONUS, 2 Punkte)**.** Mit den Hypothesen der vorherigen Übung versuchen Sie "$\mathfrak{A} \models \phi[a]$" als $\mathcal{L}(\in)$-Formel $\psi(\mathfrak{A}, \ulcorner\phi\urcorner, a)$ mit einer Gödelisierung von $\mathcal{L}(L)$ zu formulieren.

Abgabe bis Dienstag 08.11.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur