Mengenlehre: das konstruktible Universum
WS 2016/17
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 4

15.11.2016

Aufgabe 1. Seien $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega_1$ und $S \subseteq \kappa$ stationär. Zeigen Sie, dass $S \cap \{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega\}$ stationär ist.

Aufgabe 2. Seien A eine Menge mit $|A| \geq 2$ und $(A, <_A)$ eine Wohlordnung. Für $n \in \omega$ sei $A^n := \{(b_0, \dots, b_{n-1}) : b_i \in A\}$. Wir definieren eine Relation $\lhd$ auf $A^{<\omega} := \bigcup\{A^n : n \in \omega\}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}(b_0, \dots, b_{m-1}) \lhd (c_0, \dots, c_{n-1}) \Leftrightarrow\ & \max\{b_0, \dots, b_{m-1}\} <_A \max\{c_0, \dots, c_{n-1}\} \\ & \text{oder} \\ & (\max\{b_0, \dots, b_{m-1}\} = \max\{c_0, \dots, c_{n-1}\} \text{ und} \\ & \text{ein } k \in \omega \text{ existiert, so dass } k = \min\{i \in \omega : b_i \neq c_i\} \text{ und } b_k < c_k).\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) $(A^{<\omega}, \lhd)$ ist keine Wohlordnung.

b) Es gibt $b, c \in A^{<\omega}$, so dass $(b \neq c \wedge b \ntriangleleft c \wedge c \ntriangleleft b)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Gödel-Operationen G_5 und G_8 Zusammensetzungen von den anderen G_i $(i \neq 5, 8)$ sind.

Aufgabe 4. Schreiben Sie die Definition einer Kardinalzahl so genau auf, dass Sie ihre Komplexität in der Levy-Hierarchie nach oben abschätzen können.

BONUS (2 Punkte). Wenn Sie das Forcing mit dem Levykollaps kennen, können Sie auch argumentieren, dass die von Ihren vorgeschlagene Abschätzung in Aufgabe 4) optimal ist in ZF oder ZFC.

Abgabe bis Dienstag 22.11.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur