BLATT 7
06.12.2016

Aufgabe 1. Sei U eine transitive Menge, sei W der rudimentäre Abschluss von U. Wir definieren das einstellige Prädikat $Q \subseteq W$ durch:

$$Qx \leftrightarrow \mathrm{tc}(\{x\}) \subseteq W.$$

a) (5 Punkte) Zeigen Sie durch Induktion über den Aufbau der rudimentären Funktionen, dass für jede rudimentäre Funktion $f : V^n \to V$ $\forall x_1, \ldots, x_n \in V$ gilt

$$\wedge_{i=1}^{n} Q(x_i) \to Q(f(x_1, \ldots, x_n))$$

b) (1 Punkt) Wie folgert man aus (a), dass der rudimentäre Abschluss W transitiv ist? Es gilt also: Der rudimentäre Abschluss einer transitiven Menge ist wieder transitiv.

Aufgabe 2. Wir definieren:

- $R \subseteq V^n$ heißt *rudimentäre Relation*, wenn es eine rudimentäre Funktion $r \colon V^n \to V$ gibt, so dass
$$r(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \leftrightarrow Rx_1 \ldots x_n.$$
- $R \subseteq V^n$ heißt *rudimentäre' Relation*, wenn $\chi_R \colon V^n \to V$, das durch
$$\chi_R(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \neg R(x_1, \ldots, x_n) \\ 1 & R(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$
definiert ist, eine rudinemtäre Funktion ist.

a) (2 Punkte) Ist jede rudimentäre' Relation rudimentär?

b) (2 Punkte) Ist jede rudimentäre Relation rudimentär'? (Denken Sie an die Möglichkeiten, die F_6 bietet.)

Aufgabe 3. Sei $\alpha \geq \omega$ eine abzählbare Ordinalzahl (im Sinn von V). Sei $f \colon \omega \to \alpha$ eine Bijektion. Wir definieren $R \subseteq \omega \times \omega$ durch $Rmn \leftrightarrow f(m) \in f(n)$.

a) (2 Punkte) Ist $R \in L[R]$?

(Bitte wenden)

Abgabe bis Dienstag 13.12.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur

b) (2 Punkte) Gilt $L[R] \models$ "α ist abzählbar"?

c) (2 Punkte) Gibt es ein $A \subseteq \omega$, so dass $L[A] = L[R]$?

Hinweis: Denken Sie an eine rekursive (im Sinn der Rekusionstheorie) Bijektion $b\colon \omega \times \omega \to \omega$. Setzen Sie dann $A = b''R$. Wenn Sie keine Rekursionstheorie benutzen möchten, genügt auch eine in $(\omega, +, \cdot)$ definierbare Bijektion. Es muss nur $b \in L[R] \cap L[A]$ gesichert sein, damit aus $R \in L[R]$ auch $A \in L[R]$ folgt und umgekehrt. Statt mit $b \in L[R] \cap L[A]$ arbeitet man einfacher mit $b \in L$. Überlegen Sie sich die Komplexität der Definitionen der Addition und der Multiplikation in der Lévy-Hierarchie. Sind diese absolut? Jede aus den Anfängervorlesungen bekannten explizit durch Formel gegebene Bijektion $b\colon \omega \times \omega \to \omega$ hat als Graphen eine in $(\omega, +, \cdot)$ definierbare Teilmenge von ω^3.