Mengenlehre: das konstruktible Universum
WS 2016/17
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 8

13.12.2016

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Wenn $\diamondsuit$ gilt, dann gibt es eine Familie $\mathcal{F}$ von stationären Teilmengen von ω_1, so dass $|\mathcal{F}| = 2^{\aleph_1}$ und $|S_1 \cap S_2| \leq \aleph_0$ für verschiedene $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$.
Hinweis: Sei $\mathcal{F} = \{S_X : X \subseteq \omega_1\}$ *und* $S_X = \{\alpha : X \cap \alpha = S_\alpha\}$.

Aufgabe 2 (ZFC)**.** Zeigen Sie, dass es ein $A \subseteq \omega_1$ gibt, so dass $\omega_1 = \omega_1^{L[A]}$.
Hinweis: Für jedes $\alpha < \omega_1$*, man wählt* $A_\alpha \subseteq \omega$*, so dass* α *abzählbar in* $L[A_\alpha]$ *ist. Aus dem vorigen Übungsblatt wissen wir schon, wie das geht. Sei* $A \subseteq \omega_1 \times \omega_1$*, so dass* $A_\alpha = \{\xi : \langle \alpha, \xi \rangle \in A\}$ *für alle* α*. Dann ist* $\omega_1^{L[A]} = \omega_1$.

Aufgabe 3. Sei κ eine reguläre Kardinalzahl und sei S eine stationäre Teilmenge von κ. Gelte $\diamondsuit_\kappa(S)$. Gibt es dann eine Folge $\langle T_\alpha : \alpha \in S \rangle$ mit dem folgenden Eigenschaften?

$$T_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha \wedge \forall X \subseteq \kappa \times \kappa \, \forall C \subseteq \kappa (C \text{ club in } \kappa \to \exists \alpha \in C \; T_\alpha = X \cap \alpha \times \alpha).$$

Hinweis: Fixieren Sie eine Bijektion $b \colon \kappa \to \kappa \times \kappa$*. Zeigen Sie, dass* $C = \{\alpha \in \kappa : b''\alpha \subseteq \alpha \times \alpha \wedge (b^{-1})''\alpha \times \alpha \subseteq \alpha\}$ *club in* κ *ist. Wie können Sie* $\langle T_\alpha : \alpha \in S \rangle$ *aus einer Karofolge* $\langle \mathcal{S}_\alpha : \alpha \in S \rangle$ *und der Bijektion* b *definieren?*

Aufgabe 4. Sei $S \subseteq \kappa$ stationär. Wir definieren $\diamondsuit_\kappa^-(S)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \exists \langle \mathcal{S}_\alpha : \alpha \in S \rangle \text{ so dass } & \mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha), \\ & |\mathcal{S}_\alpha| < \kappa, \\ & \forall X \subseteq \kappa \{\alpha : X \cap \alpha \in \mathcal{S}_\alpha\} \text{ ist stationär in } \kappa. \end{aligned}$$

Gilt $\diamondsuit_\kappa(S) \to \diamondsuit_\kappa^-(S)$?

Bemerkung: Kunen bewies die Umkehrrichtung, einen Beweis findet man in *Kunen: Set Theory, 1980, Theorem II 7.14*

Abgabe bis Dienstag 20.12.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur