Mengenlehre: das konstruktible Universum
WS 2016/17
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 9

20.12.2016

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei L eine endliche Sprache und sei $\mathcal{A} = (A, (R^A)_{R\in L})$ eine L-Struktur. Sei $X \subseteq A$ und $X \neq \emptyset$. Bemerkung: Im Allgemeinen gibt es $\subseteq$-unvergleichbare Skolemabschlüsse von X: Betrachten Sie zum Beispiel Skolemabschlüsse von $\{0\}$ in der Struktur $(\mathbb{Q}, <)$.

Nun sollen Sie zeigen, dass dies in L gerade nicht so ist: Sei δ eine Limesordinalzahl. Zeigen Sie, dass $\emptyset \neq X \subseteq (L_\delta, \in)$ einen $\subseteq$-kleinsten Skolemabschluss hat.

Hinweis: Zu jeder Formel $\exists y \varphi(y, \bar{x})$ gibt es die verwandte Formel $\exists y(\varphi(y, \bar{x}) \wedge \forall z <_L y \neg\varphi(z, \bar{x}))$.

Aufgabe 2 (1+1+1+1+1 Punkte)**.** Sei $\kappa = (\omega_2)^V = \omega_2$. Sei $L \models 2^\mu = \kappa$ für ein μ, so dass $L \models \mu < \kappa$. Zeigen Sie:

i) $\mu \in [\omega_1^V, \omega_2^V)$,

ii) Sei $\kappa_1 = (\omega_1)^V$. Zeigen Sie: $\exists B \subseteq (\omega_1)^V\ L[B] \models |\mu| = \kappa_1$.

Wir nehmen $C \subseteq \omega_1$, so dass $\omega_1 = \omega_1^{L[C]}$ (wie in Aufgabe 2 in Blatt 8). Überlegen Sie sich, dass dies dann auch für $L[D]$ gilt, wenn $C \in L[D]$.

Sei nun $f\colon \{0,1\} \times \omega_1 \to \omega_1$ eine Bijektion, und $f \in L$. Sei

$$A := f''(\{\langle 0, \beta\rangle : \beta \in B\} \cup \{\langle 1, \gamma\rangle : \gamma \in C\}).$$

Zeigen Sie:

resume* $L[A] \models 2^\mu = \kappa$,

resume* $L[A] \models 2^{\omega_1} = \omega_2$. Hier sind ω_1 und ω_2 als Definitionen zu lesen.

resume* Folgt nun $\omega_1^{L[A]} = \omega_1$ und $\omega_2^{L[A]} = \omega_2$?

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**.** Wir nehmen an, dass $F\colon V \to V$ eine globale Auswahlfunktion ist, das heißt: $(\forall x)(F \upharpoonright x \in V)$ und $(\forall x)(F(x) \in x)$. (Die Annahme, dass es eine definierbare Klasse F gibt, die als globale Auswahlfunktion fungiert, ist in ZFC nicht beweisbar. Die Annahme ist jedoch konsistent relativ zu ZFC, denn z.B. in $\mathsf{ZFC} + V = L$ ist sie wahr. Sie wird "global choice" genannt.) Zeigen Sie:

i) Es gibt eine Wohlordnung $<_V$ auf V.

ii) Es gibt eine Bijektion $B\colon V \to \mathrm{On}$.

iii) Es gibt eine Klasse $A \subseteq \mathrm{On}$, so dass $L[A] = V$.

Abgabe bis Dienstag 11.01.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur