Mengenlehre: Große Kardinalzahlen
WS 2017/18
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 1, Abgabe am 26.10.2017, 10.15 Uhr

Aufgabe 1. Eine Menge A ist *transitiv*, wenn $x \subseteq A$ für alle $x \in A$ (wenn also aus $x \in A$ und $y \in x$ sich $y \in A$ ergibt). Man zeige:

a) $\emptyset$ ist transitiv.

b) Ist x transitiv und $y \subseteq x$, so ist $x \cup \{y\}$ transitiv. Insbesondere ist $x \cup \{x\}$ transitiv.

c) Sind x und y transitiv, so auch $x \cap y$ und $x \cup y$.

d) Allgemeiner: Ist A eine nicht leere Menge von transitiven Mengen, so sind $\bigcap A$ und $\bigcup A$ transitiv.

Aufgabe 2. a) Eine Struktur $(H, \prec)$ heißt Halbordnung, wenn $\prec$ transitiv und irreflexiv ist. Eine Relation $R \subseteq H \times H$ heißt *fundiert*, wenn jede nicht leere Teilmenge von H eine R-minimales Element hat. Geben Sie ein Beispiel für eine fundierte unendliche Halbordnung, die keine lineare Ordnung ist und in der es eine Teilmenge mit einem minimalen Element gibt, aber nicht mit einem kleinsten Element.

b) Ist $(V, \in)$ eine (klassengroße) fundierte Halbordnung?

Aufgabe 3 (Transitive Rekursion). a) Definieren Sie eine Operation $F \colon V \to V$, so dass $\forall \alpha G(\alpha) = F(G \restriction \alpha)$, wobei

$$
\begin{aligned}
G(0) &= \omega \\
G(\alpha + 1) &= 2^{G(\alpha)} \\
G(\lambda) &= \bigcup_{\delta < \lambda} G(\delta) && \lambda \text{ Limesordinalzahl.}
\end{aligned}
$$

b) Nun sei G wie im Teil a). Gibt es ein α, so dass $G(\alpha) = \alpha$?

c) (Bonus) Gibt es ein α, so dass $G(\alpha) = \alpha$ und $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$?

Aufgabe 4. Sei ON die Klasse der Ordinalzahlen. Welche Axiome von ZF gelten in $(\mathsf{ON}, \in)$?