Mengenlehre: Große Kardinalzahlen
WS 2017/18
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 2

Aufgabe 1. Seien $\mathcal{A} = (A, <_{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, <_{\mathcal{B}})$ Wohlordnungen.

(a) Sei $(A \times B, <_{\text{lex}})$ wie folgt definiert: Für $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ sei $(a_1, b_1) <_{\text{lex}} (a_2.b_2)$, wenn $(a_1 <_{\mathcal{A}} a_2)$ oder $(a_1 = a_2$ und $b_1 <_{\mathcal{B}} b_2)$. Ist $<_{\text{lex}}$ eine Wohlordnung? Die Relation $<_{\text{lex}}$ wird auch die aus $<_{\mathcal{A}}$ und $<_{\mathcal{B}}$ gebildete lexikographische Ordnung genannt. Sie können sich ohne Abgabe gerne überlegen, auf welche (möglicherweise unterschiedliche) Arten man die lexikographische Ordnung auf Produkte aus mehr als zwei Faktoren verallgemeinern kann.

(b) Sei $(A \times B, \prec)$ wie folgt definiert. $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$, wenn $(a_1 <_{\mathcal{A}} a_2)$ und $(b_1 <_{\mathcal{B}} b_2)$. Ist $\prec$ eine lineare Ordnung? Ist $\prec$ fundiert?

Aufgabe 2. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ heißt *Filter auf/über* ω, wenn

- $\omega \in \mathcal{F}$;
- $\forall a \in \mathcal{F} \forall b \in \mathcal{P}(\omega)(a \subseteq b \to b \in \mathcal{F})$;
- $\forall a, b \in \mathcal{F}(a \cap b \in \mathcal{F})$.

Ein Filter heißt *echt*, falls $\emptyset \notin \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ heißt *frei*, falls keine endliche Menge in $\mathcal{F}$ ist.

(a) Wir definieren die *Fréchet*-Menge $\text{Fr} := \{x \subseteq \omega : \omega \setminus x \text{ ist unendlich}\}$. Ist dies ein freier, echter Filter?

(b) Sei $\mathcal{U}$ ein $\subseteq$-maximaler echter Filter. Gilt

$$(\forall a \subseteq \omega)(a \in \mathcal{U} \,\dot{\vee}\, \omega \setminus a \in \mathcal{U})?$$

$\dot{\vee}$ bezeichnet das ausschließliche oder.

(c) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf ω. Folgt aus $(\forall a \subseteq \omega)(a \in \mathcal{F} \,\dot{\vee}\, \omega \setminus a \in \mathcal{F})$ die $\subseteq$-Maximalität unter den echten Filtern?

(d) Sei $\mathcal{F}$ ein freier Filter. Gibt es einen maximalen echten Filter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$?

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf ω. Seien $f, g \colon \omega \to V$. Wir definieren fEg durch $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{F}$.

(a) Ist E eine Äquivalenzrelation auf $\{f \in V : f \colon \omega \to V\}$?

(b) Sei $\mathcal{F} \neq \{\omega\}$. Gibt es ein $f \colon \omega \to V$, so dass $\{g : gEf\}$ eine echte Klasse ist?

Aufgabe 4 (Kunen Kap I Übung 5)**.** Sei α eine Limesordinalzahl. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent? Die Addition und die Exponentiation sind die ordinalen Operationen.

(a) $\forall \beta, \gamma < \alpha(\beta + \gamma < \alpha)$.

(b) $\forall \beta < \alpha(\beta + \alpha = \alpha)$.

(c) $\forall X \subset \alpha((X, \in) \cong (\alpha, \in) \vee ((\alpha \setminus X), \in) \cong (\alpha, \in))$.

(d) $\exists \delta(\alpha = \omega^{\delta})$.

Eine Limesordinalzahl α mit Eigenschaft (a) wird *(additiv) unzerlegbar* genannt.

Abgabe bis Donnerstag 02.11.2015, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur