Mengenlehre: Große Kardinalzahlen | Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
WS 2017/18 | Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz
Übungen

---

## BLATT 3

**Aufgabe 1.** Wir definieren die kardinale Addition $\oplus$ und die kardinale Multiplikation $\otimes$ für Ordinalzahlen $\alpha$, $\beta$ we folgt:

$$\alpha \oplus \beta = |\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta|.$$
$$\alpha \otimes \beta = |\alpha \times \beta|.$$

Seien $\lambda$, $\kappa$ Kardinalzahlen, wobei eine der beiden unendlich sei und die andere $\neq \emptyset$.

a) Ist $\kappa \oplus \lambda = \max(\kappa, \lambda)$?

b) Ist $\kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$?

Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 2.** Wir nutzen nun das Auswahlaxiom und definieren die kardinale Exponentiation

$$\kappa^\lambda := |\{f \in V \ : \ f \colon \lambda \to \kappa\}|.$$

a) Ist $\kappa^\lambda$ wohldefiniert? Bemerken Sie, dass jede Funktion $f : \lambda \to \kappa$ eine Teilmenge von $\lambda \times \kappa$ ist.

b) Sei $\lambda \neq 0$. Ist $\kappa^\lambda \geq \kappa$?

c) Ist $2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|$?

d) Ist $2^{\mu \otimes \nu} = (2^\mu)^\nu$?

Begründen Sie Ihre Anworten durch Beweise oder durch Angabe eines Gegenbeispiels.

**Aufgabe 3.** a) Zeigen Sie, dass $\mu \leq \nu \to \mu^\lambda \leq \nu^\lambda$.

b) Zeigen Sie, dass $\lambda \leq \kappa \to \mu^\lambda \leq \mu^\kappa$.

c) Ist $\lambda^\lambda \leq 2^\lambda$? Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $(2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$. Hierzu kann man 2.d) und 1.b) heranziehen.

**Aufgabe 4.** Sei $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Seien $A_i$ für $i \in I$ Mengen, so dass $(\forall i \in I)(|A_i| < \kappa)$ und $|I| < \kappa$. Kann $|\bigcup\{A_i : i \in I\}| = \kappa$ sein? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Sie können Ihren Beweis in die folgenden drei Schritte aufteilen.

i) Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $A_i \subseteq \kappa$ annehmen.

ii) Man kann o.B.d.A $I \subseteq \kappa$ nehmen. Dann ist $(I, <) := (I, \in)$ eine Wohlordnung.

iii) Betrachten Sie

$$\begin{aligned} f : I &\to \kappa \\ i &\mapsto \sup(A_i) \end{aligned}$$

Ist $f$ konfinal?

Abgabe bis Donnerstag 09.11.2015, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur