Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 4

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Komplexität der folgenden Formeln in der Lévy-Hierarchie:

i) $x \subseteq y$;

ii) $z = \{x\}$ und $z = \{x, y\}$;

iii) $z = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (Das ist das geordnete Paar von x und y. Man schreibt auch (x, y) oder $\langle x, y \rangle$);

iv) $x = \emptyset$;

v) $z = x \cup y$ und $z = x \cap y$;

vi) x ist transitiv.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Komplexität der folgenden Formeln in der Lévy-Hierarchie:

i) $y = \bigcup x$ und $y = \bigcap x$ (für $x \neq \emptyset$);

ii) x ist ein geordnetes Paar;

iii) $z = x \times y$;

iv) x ist eine injektive Funktion;

v) x ist eine Ordinalzahl;

vi) x ist eine Limesordinalzahl.

Aufgabe 3. Mit $\mathrm{th}(x)$ bezeichnen wir die transitive Hülle von x, und mit $\mathrm{rk}(x)$ den Rang von x. Bestimmen Sie die Komplexität der folgenden Formeln in der Lévy-Hierarchie:

i) x ist eine Limesordinalzahl;

ii) x ist eine natürliche Zahl (d.h. x ist eine endliche Ordinalzahl);

iii) $x = \omega$.

iv) y ist eine Wohlordnung auf x;

v) $y = \mathrm{th}(x)$;

vi) $y = \mathrm{rk}(x)$.

Aufgabe 4. Eine Operation $F\colon \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ heißt *normal* , wenn folgendes gilt

- F ist streng monoton wachsend: $F(\alpha) < F(\beta)$ für $\alpha < \beta$;
- F ist stetig: für jeden Limes δ $F(\delta) = \sup\{F(\alpha) : \alpha \in \delta\}$.

Ein *Fixpunkt* von F ist ein $\alpha \in \mathrm{Ord}$, so dass $F(\alpha) = \alpha$. Sei F nun normal.

i) Gibt es einen Fixpunkt?

ii) Ist die Menge der Fixpunkte von F unbeschränkt in Ord?

iii) Gilt $\forall X \subseteq \mathrm{Ord}\ F(\sup(X)) = \sup\{F(\alpha) \,:\, \alpha \in X\}$?

iv) Ist die Menge der Fixpunkte abgeschlossen?

v) Ist die $\beth$-Operation eine normale Abbildung?

vi) Ist die $\aleph$-Operation eine normale Abbildung?

vii) Ist $C := \{\alpha : \beth(\alpha) = \aleph(\alpha) = \alpha\} \neq \emptyset$?

Abgabe bis Donnerstag 16.11.2015, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur