Mengenlehre: Große Kardinalzahlen
WS 2017/18
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 5

Aufgabe 1. Seien M, N innere Modelle von ZF. Sei $j\colon M \to_{\Sigma_1} N$.

a) Zeigen Sie induktiv über $\mathrm{rk}^M(x)$, dass $j(\mathrm{rk}^M(x)) = \mathrm{rk}^N(j(x))$.

b) Ist $\mathrm{rk}^N = \mathrm{rk}^M = \mathrm{rk}^V$?

Aufgabe 2. a) Sei α eine unendliche abzählbare Ordinalzahl. Gibt es ein $E \subseteq \omega \times \omega$, so dass $(\alpha, \in)$ isomorph ist zu (ω, E)?

b) Sei b eine abzählbare transitive Menge. Gibt es ein $E \subseteq \omega \times \omega$, so dass $(b, \in)$ isomorph ist zu (ω, E)?

c) Ist E jeweils extensional?

d) Gilt das Analogon zu b) auch für eine abzählbare Menge b, die nicht transitiv ist? Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an. Welche Voraussetzung muss man in diesem Fall hinzufügen?

Aufgabe 3. Sei μ eine reguläre Kardinalzahl und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$. Betrachten Sie die Aussage $\xi(\mu)$:

$$\forall \gamma < \mu \, \forall A_i, i < \gamma \left(\bigcup_{i \in \gamma} A_i = \kappa \Rightarrow \exists i \in \gamma A_i \in \mathcal{U} \right).$$

a) Sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter über κ, und sei $\mu \leq \kappa$. Gilt „$\mathcal{U}$ erfüllt $\xi(\mu) \Rightarrow \mathcal{U}$ ist $<\mu$-vollständig"?

b) Sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter über κ, und sei $\mu \leq \kappa$. Gilt „$\mathcal{U}$ ist $<\mu$-vollständig $\Rightarrow \mathcal{U}$ erfüllt $\xi(\mu)$"?

c) Nun sei $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter. Welche ist das größte μ, so dass $\mathcal{U}$ die Aussage $\xi(\mu)$ erfüllt?

d) Gelten a) und/oder b) für Hauptultrafilter? Für welche μ?

Aufgabe 4. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, und sei A eine unendliche Menge. Sei $f\colon \kappa \to A$ surjektiv, und sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über κ. Wir definieren $\mathcal{W} := \{X \subseteq A : f^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$.

a) Ist $\mathcal{W}$ ein Filter über A?

b) Ist $\mathcal{W}$ maximal?

c) Sei $\mathcal{U}$ frei. Ist $\mathcal{W}$ frei?

d) Sei $\mathcal{U}$ $<\kappa$-vollständig. Ist $\mathcal{W}$ auch $<\kappa$-vollständig?

Für alle vier Aufgaben gilt: Begründen Sie alle Ihre Antworten durch Beweise oder Gegenbeispiele.

Abgabe bis Donnerstag 23.11.2015, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur