Mengenlehre: Große Kardinalzahlen
WS 2017/18
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 6

Aufgabe 1. Sei $\lambda > \omega$ eine Kardinalzahl mit $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. $Y \subseteq \lambda$ heißt *Club* in λ, wenn Y abgeschlossen und unbeschränkt in λ ist. $Y \subseteq \lambda$ heißt *unbeschränkt* in λ, wenn $\forall \alpha \in \lambda \exists \beta \in Y (\alpha \leq \beta)$. $Y \subseteq \lambda$ heißt *abgeschlossen* in λ, wenn $\forall \alpha < \lambda (Y \cap \alpha \neq \emptyset \to \sup(Y \cap \alpha) \in Y)$.

Sei $\mathcal{C}_\lambda := \{X \subseteq \lambda : \exists Y \subseteq X (Y \text{ Club in } \lambda)\}$.

i) Ist $\mathcal{C}_\lambda$ ein Filter?

ii) Für welche μ ist $\mathcal{C}_\lambda$ $(< \mu)$-abgeschlossen? Geben Sie möglichst große μ an.

iii) Sei $X \in \mathcal{C}_\lambda$. Sei $\mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ regulär und unendlich. Gibt es $\alpha \in X$, so dass $\mathrm{cf}(\alpha) = \mu$?

Aufgabe 2. Sei $\lambda > \omega$ eine Kardinalzahl mit $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. $S \subseteq \lambda$ heißt *stationär* in λ, wenn $\forall X \in \mathcal{C}_\lambda (X \cap S \neq \emptyset)$.

a) Gibt es eine stationäre Menge in λ?

b) Ist jede stationäre Menge in λ unbeschränkt in λ?

c) Sei $\lambda \geq \omega_2$ regulär. Gibt es zwei disjunkte stationäre Mengen? (Betrachten Sie $\{\alpha \in \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$ für verschiedene μ).

d) Sei $\lambda \geq \omega_2$. Ist $\mathcal{C}_\lambda$ ein Ultrafilter?

e) (Für Masterstudenten.) Ist $\mathcal{C}_{\omega_1}$ ein Ultrafilter? (Der Name des entsprechenden Satzes zählt als Antwort. Man muss den Satz und seinen Beweis nicht abschreiben).

Aufgabe 3. Sei λ regulär. Ein Filter F über λ heißt *normal*, wenn für alle $\langle A_i : i < \lambda \rangle$, wenn $\forall i < \lambda \; A_i \in F$ dann $\Delta_{i \in \lambda} A_i := \{\beta \in \kappa : \beta \in \bigcap_{i < \beta} A_i\} \in F$.

a) Ist $\mathcal{C}_\lambda$ normal?

b) Seien N_i, $i < \mu < \lambda$, nicht stationäre Teilmengen von λ. Ist $\bigcup\{N_i : i < \mu\}$ stationär?

c) Seien N_i, $i < \lambda$, nicht stationäre Teilmengen von λ. Ist $\nabla_{i<\lambda} N_i := \{\beta \in \lambda : \beta \in \bigcup_{i<\beta} N_i\}$ stationär?

Aufgabe 4. Sei κ eine messbare Kardinalzahl. Zeigen Sie, dass es eine stark unerreichbare Kardinalzahl $\mu < \kappa$ gibt.
Hinweis: Sei $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter über κ und $j_\mathcal{U} : V \to M \cong \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$. Dann gilt $M \models$ "κ ist stark unerreichbar", überlegen Sie sich, dass dies aus $V \models$ "κ ist stark unerreichbar" folgt. $M \models$ "$\exists \mu < j(\kappa) \mu$ ist stark unerreichbar" (nämlich $\mu = \kappa$). Folgt nun $V \models$ "$(\exists \mu < \kappa)\mu$ ist stark unerreichbar"?

Abgabe bis Donnerstag 30.11.2015, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur