Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 7

In den Aufgaben 1 bis 3 gehen wir die auf dem vorigen Blatt für Masterstudenten gestellte Aufgabe Schritt für Schritt an.

Aufgabe 1. Seien $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ und $S \subseteq \kappa$ stationär. Ist $S \cap \{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega\}$ stationär in κ?

Aufgabe 2. Nun seien $\kappa = \omega_1$ und $S \subseteq \{\alpha \in \omega_1 : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ stationär. Mit dem Auswahlaxiom nehmen wir zu jedem $\alpha \in S$ eine aufsteigende Folge $f_\alpha \colon \omega \to \alpha$, die die folgenden Eigenschaften hat: $f_\alpha(m) < f_\alpha(n)$ für $m < n \in \omega$ und $\bigcup_{n\in\omega} f_\alpha(n) = \alpha$. [Solch eine Auswahl $\{(\alpha, f_\alpha) : \alpha \in S\}$ heißt auch Leiternsystem, ladder system.]

(a) Gibt es für jedes $\eta \in \omega_1$ ein $n \in \omega$, so dass die Menge

$$\{\alpha \in S : f_\alpha(n) \geq \eta\}$$

stationär in ω_1 ist?

(b) Nun tauschen wir die Quantoren. Gibt es ein $n \in \omega$, so dass für jedes $\eta \in \omega_1$ die Menge

$$\{\alpha \in S : f_\alpha(n) \geq \eta\}$$

stationär in ω_1 ist?

Aufgabe 3. Sei $n \in \omega$ so, dass für alle $\eta \in \omega_1$ $S' := \{\alpha \in S : f_\alpha(n) \geq \eta\}$ stationär ist. Wenden Sie den Satz von Fodor auf $\alpha \mapsto f_\alpha(n)$ für $\alpha \in S'$ an und erhalten Sie ein $\beta_0 \geq \eta$ und ein $S_{\beta_0} \subseteq S'$, so dass für alle $\alpha \in S_{\beta_0}$ $f_\alpha(n) = \beta_0$.

(a) Können Sie den Satz von Fodor auf eine geeignete andere Einschränkung von $\alpha \mapsto f_\alpha(n)$ anwenden, so dass er eine stationäre Menge liefert, die disjunkt zu S_{β_0} ist?

(b) Können Sie das eben angefangene Verfahren iterieren, um ω_1 paarweise disjunkte stationäre Teilmengen von S zu erhalten?

Aufgabe 4. Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ zwei $<\kappa$-vollständige Ultrafilter über κ. Wir definieren

$$\mathcal{U} <_{\text{Mitchell}} \mathcal{W} :\Leftrightarrow \mathcal{U} \in \mathrm{Ult}(V, \mathcal{W}).$$

Sei nun $\mathcal{U} <_{\text{Mitchell}} \mathcal{W}$. Ist dann $j_\mathcal{U}(\kappa) < j_\mathcal{W}(\kappa)$?

Hinweis: Der Zwischenschritt $j_\mathcal{U}(\kappa) = j_\mathcal{U}^V(\kappa) = j_\mathcal{U}^{\mathrm{Ult}(V,\mathcal{W})}(\kappa)$ könnte für Ihren Beweis nützlich sein. Ist $j_\mathcal{U}^V(\kappa) = j_\mathcal{U}^{\mathrm{Ult}(V,\mathcal{W})}(\kappa)$? Dabei ist $j_\mathcal{U}^M$ die in M gebildete Ultrapotenzabbildung für $\mathcal{U} \in M$. Auch der Beweis von $\mathcal{U} \notin \mathrm{Ult}(V, \mathcal{U})$ kann nützlich sein.

Die Relation $<_{\text{Mitchell}}$ heißt *Mitchell-Ordnung (Mitchell order)*, nach William John Mitchell (*1943). Sie ist ist fundierte Halbordnung.

Abgabe bis Donnerstag 07.12.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur