Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 8

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe. Gibt es einen $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}(\{\circ\})$-Satz, der die Torsionfreiheit ausdrückt? Welches ist das kleinste mögliche κ?

Aufgabe 2. Sei κ regulär. Sei $\alpha < \kappa$ und $\tau = \{c_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{<\}$. Gibt es einen $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}(\tau)$-Satz φ so, dass für jedes $\mathcal{A} = (A, <^A, (c_\beta^A)_{\beta<\alpha})$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (A, <^A) \cong (\alpha, \in)?$$

Aufgabe 3. Sei nun $\alpha = \kappa$, und sei κ schwach kompakt. Wir stellen dieselbe Frage wie in Aufgabe 2.

Hinweis Denken Sie an den Satz von Keisler über die Erweiterungseigenschaft.

Aufgabe 4. Sei κ eine unendliche reguläre Kardinalzahl. Ein κ-Baum ist eine Halbordnung $(T, \prec)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $|T| = \kappa$.
- Für jeden Knoten $\forall t \in T$ gilt: Die Vorgängermenge $\{s \in T : s \prec t\}$ ist eine Wohlordnung. Der Ordnungstyp dieser heißt *die Höhe von t, kurz* $\mathrm{ht}(t)$.
- Für $\alpha \in \mathrm{On}$ definieren wir *das α-Niveau/ den α-Level* durch $L_\alpha := \{s \in T : \mathrm{ht}(s) = \alpha\}$. Wir fordern $|L_\alpha| < \kappa$.
- $\forall \alpha \geq \kappa\ L_\alpha = \emptyset$.

Seien nun κ messbar oder $\kappa = \omega$ und T ein κ-Baum. Gibt es dann einen κ-langen Ast, d.h. $b \subseteq T$, $\mathrm{otp}(b, \prec) = \kappa$? Hier ist otp der Ordungstyp.
Hinweis: Sie können die Aufgabe 3 b) von Blatt 3 nützen.

(Für Masterstudenten, ohne Bewertung) Hat jeder ω_1-Baum einen ω_1-langen Ast?

(Für Mengenlehrefans, ohne Bewertung) Gelte $2^{<\kappa} = \kappa$. Hat jeder κ^+-Baum einen κ^+-langen Ast?

Man definiert: κ hat die *tree property*, wenn jeder κ-Baum einen κ-Ast hat. Seit den 1970er Jahren und wahrscheinlich noch lange suchen einige Mengentheoretiker(innen) nach ZFC-Modellen, in denen möglichst viele reguläre κ gleichzeitig die Baumeigenschaft haben.

Abgabe bis Donnerstag 14.12.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur