Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 10

Aufgabe 1. Kann man $(\omega_1, \in)$ oder die umgekehrte Ordnung $(\omega_1, <^*)$, wobei $\alpha <^* \beta :\Leftrightarrow \beta \in \alpha$, ordnungstreu in die reellen Zahlen mit ihrer gewöhnliche Ordnung einbetten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. Sei R ein einstelliges Prädikat. Sei $(M, \in, R)$ eine Struktur, so dass $(M, \in)$ fundiert und extensional ist. (Die $\in$-Relation sei die gewöhnliche $\in$-Relation von V.) Wir bilden den Mostowski-Kollaps $\pi_M[M] = \bar{M}$. Können Sie ein $\bar{R} \subseteq \bar{M}$ finden, so dass $(M, \in, R) \cong (\bar{M}, \in, \bar{R})$?

Aufgabe 3. Sei $2 \leq \lambda$, wir fixieren eine injektive Aufzählung ${}^\kappa\lambda = \mathrm{rge}\{(\alpha, f_\alpha) \ : \ \alpha < \lambda^\kappa\}$. Sei $f \prec_{\mathrm{lex}} g := f(\Delta(f,g)) < g(\Delta(f,g))$, $\Delta(f,g) = \min\{\xi \ : \ f(\xi) \neq g(\xi)\}$. Wir färben $[{}^\kappa\lambda]^2$ mit der Sierpiński-Färbung S: Für $\alpha < \beta < \lambda^\kappa$ sei

$$S(\alpha,\beta) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } f_\alpha \prec_{\mathrm{lex}} f_\beta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass H eine S-homogene Menge des $<_{\mathrm{index}}$-Ordnungstyps κ^+ ist, und definieren rekursiv für $\alpha < \alpha_{\mathrm{Abbruch}}$ ($\alpha_{\mathrm{Abbruch}}$ wird erst unterwegs definiert):

$$\begin{aligned} B'_0 &= H, \\ \text{für } \alpha > 0 \text{ sei } B'_\alpha &:= \bigcap_{\beta<\alpha} B_\beta, \text{ falls } |B'_\alpha| = \kappa^+ \text{ sonst ist } \alpha = \alpha_{\mathrm{Abbruch}}, \\ F_\alpha &:= \prec_{\mathrm{lex}} \text{-} \min(B'_\alpha) \text{ für die homogene Farbe 1}, \\ F_\alpha &:= \prec_{\mathrm{lex}} \text{-} \max(B'_\alpha) \text{ für die homogene Farbe 0}, \\ \xi_\alpha &= \min\{\Delta(f, f_\alpha) \ : \ f \in B'_\alpha \setminus \{F_\alpha\}\}, \\ B_\alpha &:= \{f \in B'_\alpha \setminus \{f_\alpha\} \ : \ \Delta(f, F_\alpha) = \xi_\alpha\}. \end{aligned}$$

a) (2 Punkte) Begründen Sie, warum so ein Maximum existiert im Falle der Farbe 1.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie: B_α ist ein $\prec_{\mathrm{lex}}$-Endabschnitt von H für Farbe 1 (bzw ein $\prec_{\mathrm{lex}}$-Anfangsabschnitt von H für Farbe 0).

c) (2 Punkte) Zeigen Sie: Für $\lambda = 2$ ist für $(\alpha < \beta < \kappa)(\xi_\alpha < \xi_\beta)$. Also ist $\alpha_{\mathrm{Abbruch}} = \kappa$.

d) (2 Punkte) Sei immer noch $\lambda = 2$. Wir definieren $\forall \beta \in \kappa(t_\beta := F_\beta \restriction \xi_\beta)$. Zeigen Sie: $(\forall \beta < \gamma < \kappa)(t_\beta \subsetneq t_\gamma)$. Wir haben also, dass B'_κ genau ein Element hat oder leer ist und

$$H = \bigcup \{B'_\alpha \setminus B_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\} \cup B'_\kappa.$$

Da dies eine Aufteilung in disjunkte Intervalle ist, die in $\prec_{\mathrm{lex}}$ aufsteigend (absteigend für die Farbe 0) hintereinander liegen, kann also $(H, <_{\mathrm{index}})$ nicht die Wohlordnung κ^+ sein.

e) (für 4 Bonuspunkte) Zeigen Sie: Für $2 < \lambda \leq \kappa$ ist $\alpha_{\mathrm{Abbruch}} < \kappa^+$ und für $(\alpha < \beta < \alpha_{\mathrm{Abbruch}})(\xi_\alpha \leq \xi_\beta)$. Sei $A := \{\beta \in \alpha_{\mathrm{Abbruch}} \ : \ \xi_{\beta+1} \neq \xi_\beta\}$. Zeigen Sie: Falls $\lambda \leq \kappa$, ist $|A| = \kappa$. Wir definieren $\forall \beta \in A(t_\beta := f_\beta \restriction \xi_\beta)$. Zeigen Sie: $(\forall \beta < \gamma \in A)(t_\beta \subsetneq t_\gamma)$. Insgesamt gilt der Satz von der Sierpiński-Färbung also auch für λ^κ statt 2^κ. Dies kann man auch herleiten, indem man erst $\lambda^\kappa = 2^\kappa$ benutzt und dann mit der 2^κ-Sierpiński-Färbung arbeitet.

Abgabe bis Donnerstag 11.01.2018, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur