Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 13

Aufgabe 1. Sei $\kappa \geq \omega$ eine reguläre Kardinalzahl und $2^{<\kappa} = |\{f : \exists \alpha < \kappa\, f \colon \alpha \to 2\}| = \kappa$. Zeigen Sie $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

Sei κ regulär. Sei für $\alpha < \kappa^+$, $C_\alpha \subseteq \alpha$ club in α, $\operatorname{otp}(C_\alpha) \leq \kappa$. So eine Folge $\langle C_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ heißt *ladder system*. Wir definieren für $\alpha < \beta < \kappa^+$ $\beta_0^\alpha = \beta$, $\beta_{i+1}^\alpha = \min(C_{\beta_i^\alpha} \setminus \alpha)$, bis zum letzten Folgenglied $\beta_n^\alpha = \alpha$. Die Folge $\langle \beta_0^\alpha, \dots, \beta_n^\alpha \rangle$ heißt *Todorčević-Gang* von β nach α. Für $\kappa^+ > \beta > \alpha$ definiert man nun die folgenden sogenannten Spurfunktionen: Sei

$$\varrho_\beta(\alpha) = \langle C_{\beta_i^\alpha} \cap \alpha : 0 \leq i < n \rangle,$$

und sei

$$\bar{\varrho}_\beta(\alpha) = \langle \operatorname{otp}(C_{\beta_i^\alpha} \cap \alpha) : 0 \leq i < n \rangle.$$

Aufgabe 2. (a) Kann man aus ϱ_β den Wert β ablesen?

(b) Sei $\kappa = 2^{<\kappa}$. Sei $\alpha < \kappa^+$ fest. Kann für konfinal in κ^+ viele $\beta > \alpha$ der Wert $\varrho_\beta(\alpha)$ konstant sein?

(c) Sei $k = 2^{<\kappa}$. Gibt es eine in κ^+ konfinale Menge X, so dass $\beta_0 = \min X \setminus \{0\}$ und der Wert $\varrho_\beta \upharpoonright \beta_0$ für $\beta \in X$ konstant ist?

(d) Warum kann es keine in κ^+ konfinale Folge $\langle \beta_\gamma : \gamma < \kappa^+ \rangle$ geben, so dass für $\gamma < \kappa^+$, $\beta_\gamma > \gamma$ und für $\gamma < \delta < \kappa^+$ $\varrho_{\beta_\gamma} \upharpoonright \gamma \subseteq \varrho_{\beta_\delta} \upharpoonright \delta$? Solch eine Folge wäre ein Ast von $T = \{\varrho_\beta \upharpoonright \alpha : \alpha \leq \beta < \kappa^+\}$.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie die Eigenschaft (2) aus der Vorlesung für $\bar{\varrho}$.

(b) Gilt auch Eigenschaft (3)?

(c) Sei nun $2^{<\kappa} = \kappa$. Auch ohne (3) kann man schließen: Der Baum $\{\bar{\varrho}_\beta \upharpoonright \alpha + 1 : \alpha < \beta < \kappa^+\}$ ist von Breite $\leq \kappa$, da der Baum $T = \{\varrho_\beta \upharpoonright \alpha : \alpha \leq \beta < \kappa^+\}$ von Breite $\leq \kappa$ ist. Warum?

(d) Warum kann es keine in κ^+ konfinale Folge $\langle \beta_\gamma : \gamma < \kappa^+ \rangle$ geben, so dass für $\gamma < \delta < \kappa^+$ $\bar{\varrho}_{\beta_\gamma} \subseteq \bar{\varrho}_{\beta_\delta}$?

Aufgabe 4. Gibt es für ein unendliches $\gamma \in \mathrm{On}$ einen normalen feinen Filter über $[\gamma]^{<\omega}$? Zum Beispiel können Sie den Diagonalschnitt der Folge $A_\alpha = \{x \in [\gamma]^{<\omega} : \alpha + 1 \in x\}$, $\alpha < \gamma$, ausrechnen.

Abgabe bis Donnerstag 01.02.2018, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur