Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 14

Alle Punkte auf diesem Blatt sind Bonuspunkte

Sei κ regulär. Sei für $\alpha < \kappa^+$, $C_\alpha \subseteq \alpha$ club in α, $\mathrm{otp}(C_\alpha) \leq \kappa$. Wir definieren für $\alpha < \beta < \kappa^+$ $\beta_0^\alpha = \beta$, $\beta_{i+1}^\alpha = \min(C_{\beta_i^\alpha} \setminus \alpha)$, bis zum letzten Folgenglied $\beta_n^\alpha = \alpha$. Die Folge $\langle \beta_0^\alpha, \dots, \beta_n^\alpha \rangle$ heißt *Todorčević-Gang* von β nach α. Für $\kappa^+ > \beta > \alpha$ definiert man:

$$\bar{\varrho}_\beta(\alpha) = \langle \mathrm{otp}(C_{\beta_i^\alpha} \cap \alpha) \,:\, 0 \leq i < n \rangle.$$

Nun nehmen wir den Baum

$$T = \{ \bar{\varrho}_\beta \restriction \alpha + 1 \,:\, \alpha < \beta < \kappa^+ \},$$

geordnet mit der Enderweiterung, welche wir mit $<_T$ bezeichnen. Wir definieren für $t = \bar{\varrho}_\beta \restriction \alpha + 1 \in T$, $f(t) = \bar{\varrho}_\beta(\alpha)$.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Wie groß ist das Bild von f? Wie groß ist das Bild von f unter der Annahme $2^{<\kappa} = \kappa$?

(b) Sei $f(s) = f(t)$. Ist dann $s \not<_T t$? Ist im Falle $2^{<\kappa} = \kappa$ die Funktion f eine Spezialisierungsfunktion für $(T, <_T)$?

Hinweis: Beachten Sie Eigenschaft (2) der $\bar{\varrho}$-Funktion vom letzten Blatt. Zeigen Sie, dass $\bar{\varrho}_\beta$ eine injektive Funktion ist.

Aufgabe 2. Sei U ein normaler Ultrafilter über $[\gamma]^{<\kappa}$. Sei $f \colon [\gamma]^{<\kappa} \to \gamma$, so dass

$$(\exists B \in U)(\forall x \in B \setminus \{0\})(f(x) \in x).$$

Gibt es ein $A \in U$, so dass f auf A konstant ist?

Aufgabe 3. (a) Sei U ein normaler Ultrafilter über $[\kappa]^{<\kappa}$. Ist dann $U_\kappa = U \cap \mathcal{P}(\kappa)$ ein normaler Ultrafilter über κ?

(b) Sei U ein normaler Ultrafilter über κ. Ist dann $U_{[\kappa]^{<\kappa}} = \{X \subseteq [\kappa]^{<\kappa} \,:\, X \cap \kappa \in U\}$ ein normaler Ultrafilter über $[\kappa]^{<\kappa}$?

Aufgabe 4. Sei U ein feiner normaler Ultrafilter über $[\gamma]^{<\kappa}$ und sei $\kappa \leq \delta < \gamma$. Gibt es dann auch einen feinen normalen Ultrafilter über $[\delta]^{<\kappa}$?

Abgabe bis Donnerstag 08.02.2018, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur