Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 2

Abgabe am 30.10.2018 vor 10 Uhr

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathbf{V}, (A, R), (B, S)$ Wohlordnungen. Wir sagen, dass (A, R) und (B, S) isomorph sind $(A, R) \cong (B, S)$, wenn es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt, sodass für alle $a, a' \in A$ gilt: $aRa' \leftrightarrow f(a)Sf(a')$. Zeigen Sie, dass einer der drei Fälle eintritt:

i) $(A, R) \cong (B, S)$ oder

ii) es gibt ein $a \in A$, sodass $(\{c \in A : cRa\}, R) \cong (B, S)$ oder

iii) es gibt ein $b \in B$, sodass $(\{c \in B : cSb\}, S) \cong (A, R)$.

Hierbei schreiben wir die Strukturen nicht immer streng wie in der Vorlesung Mathematische Logik, sondern lassen Relationen zu, die aus dem Träger herausragen. Die entsprechenden Einschränkungen auf die Träger sind gemeint.

Aufgabe 2. Nun seien $A, B \in \mathbf{V}, (A, R), (B, S)$ nur noch lineare Ordnungen. Gilt eine analoge Aussage wie in Aufgabe 1? Finden Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel.

Definition Sei $X \in \mathbf{V}$ eine Menge. Wir definieren die folgenden Varianten des Auswahlaxioms:

$\mathrm{AC}_\omega(X)$ (*Abzählbare Auswahl auf* X): Für alle $\{P_n : n \in \omega\}$ mit $(P_n \subseteq X \wedge P_n \neq \emptyset)$, gibt es eine Funktion $f : \omega \to \mathbf{V}$, so dass $\forall n \in \omega(f(n) \in P_n)$.

$\mathrm{DC}(X)$ (*Abhängige Auswahl auf* X): Für jedes $R \subseteq X \times X$ mit $\forall x \in X \exists y \in X((x, y) \in R)$, gibt es eine Folge $\langle x_n : n \in \omega \rangle$, so dass $\forall n \in \omega((x_n, x_{n+1}) \in R)$.

AC_ω (*Abzählbare Auswahl*): Für alle Mengen X gilt $\mathrm{AC}_\omega(X)$.

DC (*Abhängige Auswahl, dependent choice*): Für alle nicht leeren Mengen X gilt $\mathrm{DC}(X)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Wenn es eine surjektive Funktion $f : Y \to X$ gibt, dann gelten folgende zwei Implikationen: $\mathrm{AC}_\omega(Y) \Rightarrow \mathrm{AC}_\omega(X)$ und $\mathrm{DC}(Y) \Rightarrow \mathrm{DC}(X)$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die folgenden möglichen Implikationen:
$\mathrm{AC}_\omega \to \mathrm{AC}$
$\mathrm{AC}_\omega \to \mathrm{DC}$
$\mathrm{AC} \to \mathrm{DC}$
$\mathrm{AC} \to \mathrm{AC}_\omega$
$\mathrm{DC} \to \mathrm{AC}_\omega$
$\mathrm{DC} \to \mathrm{AC}$

Finden Sie die drei unter diesen, die aus ZF folgen, und beweisen Sie diese. Die technischen Mittel zum Beweis der Nicht-Implikationen werden wir in der Vorlesung kennen lernen.