Blatt 3

Abgabe am 06.11.2018 vor 10 Uhr

Aufgabe 1. Welche Axiome aus ZFC gelten in V_ω? Gilt $V_\omega \models \mathsf{ZFC}$?

Sei $F\colon \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ ein Funktional.

F heißt *stetig*, falls für jede Limeszahl λ die Gleichung $F(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$ gilt.

F heißt *monoton wachsend*, falls $F(\alpha) < F(\beta)$ für alle $\alpha < \beta$ gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jedes stetige monoton wachsende Funktional $F\colon \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ unbeschränkt viele Fixpunkte hat, d.h. für jedes α_0 gibt es ein $\alpha \geq \alpha_0$, so dass $F(\alpha) = \alpha$. Leiten Sie daraus ab, dass für jedes α das Funktional $\beta \mapsto \exp(\alpha, \beta)$ klassen-viele Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 3. Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ und gelte $(\alpha \geq \omega \vee \beta \geq \omega)$. Gilt $\exp(\alpha, \beta) < \max(\alpha, \beta)^+$?

Aufgabe 4 (Die $\aleph$-Universität)**.** Diese Aufgaben stammt aus dem Buch "Set Theory" von Kunen. Die Anforderungen, um an der $\aleph$-Universität zu promovieren, sind lediglich die Kurse $\boxed{\sigma}$, für jedes $\sigma \in \omega^{<\omega}$. Die Voraussetzungen für $\boxed{\sigma}$ sind alle Kurse $\boxed{\tau}$, für ein τ, das aus σ entsteht, wenn man einen Eintrag n aus σ durch eine endliche (möglicherweise auch leere) Folge von natürlichen Zahlen echt kleiner n ersetzt. So lehrt Sie z.B. $\boxed{2,1,7,1}$ alles über die Folge $(2,1,7,1)$, und hat als Voraussetzung unter anderem $\boxed{1,7,1}$, $\boxed{0,1,1,0,1,7,1}$, $\boxed{2,1,5,5,4,0,1,1}$. $\boxed{}$ lehrt Sie alles über die leere Folge $\emptyset$ und besitzt keine Voraussetzungen. Es ist nicht möglich, in einem Semester zwei Kurse zu belegen, die aufeinander aufbauen. An die Anzahl der Kurse, die man in einem Semester belegt, gibt es sonst keine weitere Einschränkung, sie kann auch unendlich sein.

1. Zeigen Sie, dass die Relation

$$(\tau, \sigma) \in R :\Leftrightarrow \boxed{\tau} \text{ ist Voraussetzung von } \boxed{\sigma}$$

   fundiert ist; d.h., es gibt ein α, so dass Sie in α Semestern promovieren können. Können Sie sogar das kleinste solche α bestimmen?

2. Nun soll $\mathrm{rk}_R(x)$ das erste Semester angeben, in dem Sie frühestens Kurs $\boxed{x}$ belegen können. Berechnen Sie die Rangfunktion $\mathrm{rk}_R\colon \omega^{<\omega} \to \mathbf{On}$ von R.

Hinweis: Da eine Rangfunktion nützlich ist, um Fundiertheit zu zeigen, können Sie auch zuerst den zweiten Aufgabenteil bearbeiten. Denken Sie an die Cantor'sche Normalform bei der Rangfunktion.