

**Blatt 8**

Abgabe am 11.12.2018 vor 10 Uhr

**Aufgabe 1.** Seien  $x, y \in \mathbf{L}$  gegeben. Zeigen Sie, dass folgende Mengen auch in  $\mathbf{L}$  liegen

$$\{x, y\}, \langle x, y \rangle, \bigcup x \text{ und } \omega.$$

**Aufgabe 2.** Ist  $\{\alpha < \omega_1 : L_\alpha \prec L_{\omega_1}\}$  club in  $\omega_1$ ?

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie die Komplexität der Operationen

a)  $x \mapsto \text{tcl}(x)$

b)  $x \mapsto \text{rk}(x)$

in der Lévy-Hierarchie (mit Hintergrundtheorie ZF).

*Hinweis:* Sei  $F: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  eine Operation aus der Aufgabenstellung und  $\varphi(x, y)$  eine Formel, so dass gilt:

$$\text{ZF} \vdash F \text{ ist eine Operation und } (F(x) = y \leftrightarrow \varphi(x, y)).$$

Gesucht ist nun die minimale Komplexität von  $\varphi$  in der Lévy-Hierarchie. Eventuell hilft Ihnen der  $\Delta_1$ -Rekursionssatz.

**Aufgabe 4.** Bestimmen Sie möglichst genau die Komplexität der Aussage

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

**Aufgabe 5** (2 Bonus-Punkte). Berechnen Sie den Mostowski-Kollaps der  $\in$ -Struktur

$$\mathfrak{A} := (\{\{\aleph_1\}, \{\aleph_2\}\}, \in).$$