

### Blatt 3

Abgabe am 24.11.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin -  
Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Sei  $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathbf{On} \rangle$  die von Neumann-Hierarchie und  $\mathbf{WF} = \bigcup V_\alpha$ . Seien  $x, y \in \mathbf{WF}$ .

1. Zeigen Sie,  $\text{rk}(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ .
2. Berechnen Sie:
  - (a)  $\text{rk}(\mathcal{P}(x))$ ,
  - (b)  $\text{rk}(\{x\})$ ,
  - (c)  $\text{rk}(x \times y)$ ,
  - (d)  $\text{rk}(\bigcup x)$ .

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Arbeiten Sie in  $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$ . Sei  $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{V}$  eine Teilklasse, sodass gilt:

$$(\forall x \subseteq \mathbf{K} \wedge x \in \mathbf{V}) \rightarrow x \in \mathbf{K}.$$

Zeigen Sie, dass dann  $\mathbf{WF} \subseteq \mathbf{K}$  gelten muss.  
Was folgt, wenn Sie die Fundierung dazu nehmen?

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Seien  $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$  mit  $(\alpha \geq \omega \vee \beta \geq \omega)$ . Zeigen Sie, dass  $\exp_{\text{ord}}(\alpha, \beta) < \max(\alpha, \beta)^+$  gilt.

**Aufgabe 4** (4 Bonus-Punkte). Die  $\aleph$ -Universität: Die Anforderungen um an der  $\aleph$ -Universität zu promovieren, sind lediglich die Kurse  $\boxed{\sigma}$ , für jedes  $\sigma \in \omega^{<\omega}$ . Die Voraussetzungen für  $\boxed{\sigma}$  sind alle Kurse  $\boxed{\tau}$ , für ein  $\tau$ , dass aus  $\sigma$  entsteht, wenn man einen Eintrag  $n$  aus  $\sigma$  durch eine endliche (möglicherweise auch leere) Folge von natürlichen Zahlen echt kleiner  $n$  ersetzt. So lehrt Sie z.B.  $\boxed{2, 1, 7, 1}$  alles über die Folge  $(2, 1, 7, 1)$ , und hat als Voraussetzung unter anderem  $\boxed{1, 7, 1}$ ,  $\boxed{0, 1, 1, 0, 1, 7, 1}$ ,  $\boxed{2, 1, 5, 5, 4, 0, 1, 1}$ .  $\square$  lehrt Sie alles über die leere Folge  $\emptyset$  und besitzt keine Voraussetzungen.

1. Zeigen Sie, dass die Relation  $(\tau, \sigma) \in R \Leftrightarrow \boxed{\tau}$  ist Voraussetzung von  $\boxed{\sigma}$ , fundiert ist; d.h. Sie können in ordinal vielen Semestern promovieren.
2. Berechnen Sie die Rangfunktion  $\text{rk}_R : \omega^{<\omega} \rightarrow \mathbf{On}$  von  $R$ , wobei  $\text{rk}_R(x)$  das erste Semester angibt, in dem Sie frühestens Kurs  $\boxed{x}$  belegen können. Es ist nicht möglich, in einem Semester zwei Kurse zu belegen, die aufeinander aufbauen.

*Hinweis:* Da eine Rangfunktion nützlich ist, um Fundiertheit zu zeigen, können Sie auch zuerst den zweiten Aufgabenteil bearbeiten. Denken Sie an die Cantor'sche Normalform bei der Rangfunktion.