

Blatt 4

Abgabe am 1.12.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin -
Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

Die transitive Hülle einer Menge x sei mit $\text{tcl}(x)$ bezeichnet. Sei κ eine Kardinalzahl. Wir definieren

$$H(\kappa) := \{x \in \mathbf{V} : |\text{tcl}(x)| < \kappa\}.$$

Aufgabe 1 (8 Punkte). Welche Axiome aus ZFC gelten in $(H(\omega_1), \in)$? Gilt $(H(\omega_1), \in) \models \text{ZFC}$?

Vorspann zur Aufgabe 2: Das *Sammlungsschema* (*Collection Scheme*) sagt: Für jedes $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$, das höchstens die freien Variablen $\{x, y, A, w_1, \dots, w_n\}$ enthält, gilt folgendes:

$$\forall A \forall w_1 \dots \forall w_n \left(\forall x \in A \exists y \varphi(x, y, \bar{w}) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi(x, y, \bar{w}) \right).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie:

1. ZF – Ersetzungsschema + Sammlungsschema \rightarrow Ersetzungsschema.
2. ZF \rightarrow Sammlungsschema.

Hinweis zu 2: Wir nehmen eine Formel $\psi(x, \beta)$, die sagt:

$$\beta \text{ ist die kleinste Ordinalzahl, so dass } \exists y (\varphi(x, y) \wedge y \in V_\beta).$$

Warum kann man ψ erststufig ausdrücken? Ist $\beta \mapsto V_\beta$ erststufig? Nach welchem Satz?

Aus welchem Satz folgt: $\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists \beta \psi(x, \beta)$?

Wenden Sie das Ersetzungsschema auf ψ an. Sind die Voraussetzungen dazu erfüllt? Wie hängt eine Obermenge der Bildmenge von ψ mit einer Menge der gesuchten Art zusammen?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Gibt es ein $\kappa > \omega$, so dass $(H(\kappa), \in)$ das Potenzmengenaxiom erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.