Blatt 9

Abgabe am 19.01.2021 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

Für das gesamte Aufgabenblatt nehmen wir an, dass M ein abzählbares, transitives Modell eines genügend großen Fragmentes von ZFC ist und $\mathbb{P} \in M$ eine Halbordnung und G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M sind.

Aufgabe 1. Seien $p, q, r \in \mathbb{P}$. Wir definieren einen $\mathbb{P}$-Namen

$$\tau := \{\langle \emptyset, p\rangle, \langle \{\langle \emptyset, q\rangle\}, r\rangle\}.$$

i) Berechnen Sie τ_G für alle 8 Möglichkeiten, je nachdem, ob die Bedingungen p, q, r Elemente von G sind oder nicht.

ii) Berechnen Sie die Mächtigkeit von $M[G]$.

Aufgabe 2. Seien $p, q \in \mathbb{P}$ inkompatibel. Zeigen Sie, dass die Menge

$$O := \{\tau \in M \ : \ p \Vdash \tau = \check{0}\}$$

eine echte Klasse in M ist, d.h. es kann nicht $O \in M$ gelten.

Aufgabe 3. Eine Bedingung $p \in \mathbb{P}$ heißt *Atom*, wenn je zwei stärkere Bedingungen $q, r \leq p$ kompatibel sind.

i) Nehmen Sie an, dass $\emptyset \neq \mathbb{P}$ keine Atome hat. Gibt es eine unendliche Antikette?

ii) Angenommen, $\mathbb{P}$ besitzt für jedes $n < \omega$ eine Antikette mit mindestens n Elementen. Hat $\mathbb{P}$ dann eine unendliche Antikette?

Hinweis: Bei dem zweiten Aufgabenteil könnte man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Menge der Atome dicht in $\mathbb{P}$ ist oder nicht.

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Mostowski-Kollaps folgender Strukturen:

1. $\mathfrak{A} = (\{\{\aleph_1\}, \{\aleph_2\}\}, \in)$,
2. $\mathfrak{B} = (\mathbf{V}, \emptyset)$,
3. $\mathfrak{C} = (\alpha, \in)$, für eine Ordinalzahl $\alpha > 0$.

Aufgabe 5 (Bonus). Wir nehmen nun an, dass M abzählbar ist und $(M, \in) \prec (H(\theta), \in)$ für eine überabzählbare Kardinalzahl θ. Sei π die Mostowski-Operation.

Zeigen Sie, dass $\pi'' M \cap \omega_1$ eine abzählbare Ordinalzahl ist.

Wie sieht $\pi'' M \cap \mathbf{On}$ aus?