

BLATT 10
(21.12.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte).

- a) Geben Sie jeweils eine $\mathcal{L}(\emptyset)$ -Aussage φ an, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ bzw. $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ für jede Symbolmenge τ und jede $\mathcal{L}(\tau)$ -Struktur \mathfrak{A} gilt.
- b) Wir nehmen an, es gäbe eine Struktur \mathfrak{B} mit leerem Universum. Haben ihre Formeln aus Teil a) immer noch dieselbe Eigenschaft bezüglich \mathfrak{B} ? Finden Sie eine $\mathcal{L}(\emptyset)$ -Aussage, die von leeren Strukturen erfüllt aber von „regulären“ Strukturen nicht erfüllt werden?

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Es sei $\tau = \{E\}$ mit einer zweistelligen Relation E . Formalisieren Sie die folgenden in Worten geschriebenen Aussagen als $\mathcal{L}(\tau)$ -Aussagen.

- a) Die Relation E ist eine Äquivalenzrelation.

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ beliebig.

- b) Es existiert mindestens eine Äquivalenzklasse von E mit mindestens n Elementen.
- c) Es existiert mindestens eine Äquivalenzklasse von E mit genau n Elementen.
- d) Es existiert genau eine Äquivalenzklasse von E mit genau n Elementen.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Es sei $\tau = \{R\}$ mit einer zweistelligen Relation R . Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ lässt sich auf natürliche Art als $\mathcal{L}(\tau)$ -Struktur mit Universum V auffassen, in dem man R^G durch $\{(v, w) : \{v, w\} \in E\}$ interpretiert.

Beschreiben Sie in Worten, welche Graphen die folgenden $\mathcal{L}(\tau)$ -Aussagen erfüllen und zeichnen Sie jeweils einen erfüllenden und einen nicht erfüllenden Graphen. $E = R$, sorry.

- a) $\forall x \exists y \exists z (\neg Exy \wedge Exz)$
- b) $\exists x \exists y \exists z (\neg y = z \wedge Exy \wedge Exz \wedge \forall w (Exw \rightarrow (w = y \vee w = z)))$

Rückseite beachten!

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Es sei $\tau = \{0, 1, +, \cdot, P, E\}$ mit zwei Konstanten 0 und 1, zwei zweistelligen Funktionen $+$ und \cdot sowie einer einstelligen Relation P . Ferner sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \mathbb{P}, 2\mathbb{N})$ die $\mathcal{L}(\tau)$ -Struktur, in der 0, 1, $+$ und \cdot wie üblich interpretiert werden, P durch die Primzahlen \mathbb{P} und E durch die geraden Zahlen $2\mathbb{N}$.

Formalisieren Sie die *Goldbachsche Vermutung* als $\mathcal{L}(\tau)$ -Aussage: Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.

Bonus (4 Punkte): Es sei $\tau' = \{+, \cdot\}$ und $\mathfrak{N}' = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die $\mathcal{L}(\tau')$ -Struktur in der $+$ und \cdot wie üblich interpretiert werden. Können Sie die Goldbachsche Vermutung auch als $\mathcal{L}(\tau')$ -Aussage formalisieren?