Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 11

(11.1.2023)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{+, \cdot\}$ mit zwei zweistelligen Funktionen $+$ und $\cdot$. Wir betrachten die $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, in der $+$ und $\cdot$ wie üblich interpretiert werden, eine Belegung $s : \{v_0, v_1, \dots\} \to \mathbb{N}$ mit $s(v_0) = 5$, $s(v_1) = 4$ und $s(v_2) = 13$, sowie die folgenden drei $\mathcal{L}(\tau)$-Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 :&\quad + \cdot v_0 v_0 \cdot v_1 v_1 = \cdot v_2 v_2, \text{ oder } (v_0 \cdot v_0) + (v_1 \cdot v_1) = v_2 \cdot v_2,\\
\varphi_2 :&\quad \exists x\ \cdot xx = v_1, \text{ oder } \exists x\ x \cdot x = v_1,\\
\varphi_3 :&\quad \forall x \forall y (\cdot xy = v_2 \to (x = v_2 \lor y = v_2)), \text{ oder } \forall x \forall y (x \cdot y = v_2 \to (x = v_2 \lor y = v_2))
\end{aligned}$$

a) Entscheiden Sie für $i = 1, 2, 3$ ob $\mathfrak{N} \models \varphi_i[s]$ gilt.

b) Gilt $\mathfrak{N} \models \varphi_i[s(\frac{12}{v_1})]$ für $i = 1, 2$?

c) Geben Sie eine Belegung s' an, sodass $\mathfrak{N} \models \varphi_i[s']$ gilt für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{R\}$ mit einem zweistelligen Relationszeichen R. Geben Sie für die folgenden $\mathcal{L}(\tau)$-Formeln jeweils eine $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur $\mathfrak{A}$ und eine Belegung s an, sodass die jeweilige Formel von $\mathfrak{A}$ mit der Belegung s erfüllt wird.

a) $Rxy \land Ryz \land \neg Rxz$

b) $\forall x Rxy$

c) $\neg x = y \land Rxy \land \forall z (Rzy \to z = x)$

d) $\forall x \forall y (Rxy \to \exists z (Rxz \land Rzy))$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{R\}$ mit einem zweistelligen Relationszeichen R. Geben Sie eine $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur an, welche die folgenden $\mathcal{L}(\tau)$-Sätze erfüllt, und drei $\mathcal{L}(\tau)$-Strukturen, welche jeweils zwei der drei Sätze erfüllen, den dritten aber nicht (in jeder möglichen Kombination).

i) $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))$,

ii) $\forall x \forall y ((R(x, y) \land R(y, x)) \to x = y)$,

iii) $(\forall x \exists y R(x, y) \to \exists y \forall x R(x, y))$.

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 18.1.2023, 10 Uhr.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{c_1, c_2, f, H\}$ mit zwei Konstanten c_1 und c_2, einem einstelligen Funktionszeichen f und einem einstelligen Relationszeichen H.

a) Sei $\Sigma = \{\forall x(fx = c_1 \rightarrow Hx),\ \forall y(Hy \rightarrow y = c_2)\}$. Gilt dann $\Sigma \models fc_2 = c_1$?

b) Gilt $\Sigma \models \exists x(Hx \rightarrow \forall y Hy)$?