Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 12

(18.1.2023)

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Es sei τ eine beliebgige Symbolmenge. Eine bijektive Abbildung $i : A \to B$ zwischen den Universen zweier $\mathcal{L}(\tau)$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißt *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$, falls

i) $i(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$,

ii) $i(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(i(a_1), \ldots, i(a_n))$ für jedes n und alle n-stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ und

iii) $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ genau dann gilt, wenn auch $(i(a_1), \ldots, i(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$ für jedes n und alle n-stelligen Prädikate $R \in \tau$.

Zwei $\mathcal{L}(\tau)$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph*, falls es einen Isomprphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gibt. Begründen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen.

a) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R. Sind $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$ isomorph?

b) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R. Sind $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ und $(\mathbb{R}, <)$ isomorph?

c) Sei $\tau = \{c, f\}$ für ein Konstantenzeichen c und ein zweistelliges Funktionssymbol f.
Sind $(\{2^n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}, 1, \cdot\}$ und $(\mathbb{Z}, 0, +\}$ isomorph?

d) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R. Welche Eigenschaften muss ein gerichteter Graph haben, damit er als $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur isomorph zu einem ungerichteten Graphen ist?

e) Sei τ wieder beliebig, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei isomorphe Strukturen und φ eine $\mathcal{L}(\tau)$-Formel. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine Belegung s in $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$, wenn es eine Belegung s' in $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi[s']$ gibt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Es seien φ, ψ, ϱ drei $\mathcal{L}(\tau)$-Formeln für eine beliebige Symbolmenge τ. Zeigen oder widerlegen Sie im Hilbertkalkül:

a) $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \varrho))$

b) $\neg(\varphi \to \psi) \vdash (\psi \to \varphi)$

c) $\vdash (\varphi^x_t \to \exists x \varphi)$, wenn t für x in φ eingesetzt werden kann.

d) $(\varphi \to \psi) \vdash (\exists x \varphi \to \psi)$, wenn x nicht frei in φ auftritt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Zeigen Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik:
Eine Formelmenge Γ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Vollständigkeitssatz.

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 25.1.2023, 10 Uhr.