BLATT 13

(25.1.2023)

Alle Punkte auf diesem Blatt zählen als Bonuspunkte.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ak}, q_{ab})$ die Turingmaschine gegeben durch:

- $Q = \{q_0, q_1, q_{ak}, q_{ab}\}$, in der Reihenfolge q_0, q_1, q_2, q_3 wie in der Menge aufgelistet,
- $\Sigma = \{1\}$,
- $\Gamma = \{b, 1\}$, in der Reihenfolge x_0, x_1,
- $\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$, $\delta(q_0, b) = (q_{ak}, b, R)$, $\delta(q_1, 1) = (q_0, 1, R)$, $\delta(q_1, b) = (q_{ab}, b, L)$. Die Zeilen der Tafel sind in dieser Reihenfolge gedacht.

Bestimmen Sie eine/die Gödelnummer $\#(M)$ von M.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Eine Abbildung $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt (analog zu Definition 2.14) *berechenbar*, wenn es eine Turingmaschine gibt, die aus dem Input $(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})$ den Output $f(n_0, \ldots, n_{k-1})$ liefert.
Es sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ solch eine berechenbare Abbildung. Ist dann auch der Graph

$$\Gamma_f = \{(n_0, n_1, \ldots, n_k) \ : \ f(n_0, \ldots, n_{k-1}) = n_k\} \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$$

von f berechenbar? Das heißt, jetzt ist zu entscheiden, ob der Graph die Akzeptierungsmenge einer auf jede Eingabe nach endlicher Zeit stoppenden Turingmaschine ist. Gibt es umgekehrt eine nicht berechenbare Abbildung von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$, deren Graph berechenbar ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Wir betrachten die Definition der Gödelnummern von Zeichenfolgen für eine beliebige höchstens abzählbare Zeichenmenge τ am Anfang von Kapitel 6.3. Insbesondere betrachten wir die beiden Abbildungen $\ulcorner \cdot \urcorner : \mathcal{L}(\tau)^* \to \mathbb{N}$ und $\langle\langle \cdot \rangle\rangle : \mathbb{N}^{<\infty} \to \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{N}^{<\infty}$ die Menge der endlichen Tupel von natürlichen Zahlen ist, also

$$\mathbb{N}^{<\infty} = \{(n_0, \ldots, n_k) \ : \ k \in \mathbb{N} \text{ und } n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

a) Ist die Funktion $\langle\langle \cdot \rangle\rangle : \mathbb{N}^{<\infty} \to \mathbb{N}$ injektiv?

b) Ist die Funktion $\langle\langle \cdot \rangle\rangle : \mathbb{N}^{<\infty} \to \mathbb{N}$ surjektiv?

c) Ist $\ulcorner \cdot \urcorner : \mathcal{L}(\tau)^* \to \mathbb{N}$ injektiv? Hängt die Antwort darauf von τ ab?

d) Ist $\ulcorner \cdot \urcorner : \mathcal{L}(\tau)^* \to \mathbb{N}$ surjektiv? Hängt die Antwort darauf von τ ab?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Ist das diagonale Halteproblem

$$DH = \{(\#(M), \#(M)) \in \Sigma_U^* \ : \ M \text{ ist eine TM und } M \text{ akzeptiert } \#(M)\}.$$

entscheidbar?

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 1.2.2023, 10 Uhr.