Kombinatorik

Heike Mildenberger

Fassung vom 5.2.2024 nachmittags, compiled 5. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen über Graphen

Nicht getext: Definitionen, Sektionen 1.1. 1.2 1.3 aus Diestel [3]. Nun sind wir in Sektion 1.4 über Verbundenheit (Zusammenhang, connectivity). Ein nicht so alter Satz ist der folgende, der einen recht großen durchschnittlichen Grad eines Graphen mit etwa ein Viertel großer Verbundenheit verbindet. Erinnerung

$$\varepsilon(H) = \frac{||H||}{|H|} = \frac{1}{2}d(H). \tag{1.1}$$

ist die durchschnittliche Kantendichte, mit den Notationen $||H||$ ist $|E(H)|$ und $|H| = |V(H)|$.

1.1 Verbundenheit und ein Satz von Mader

Satz 1.1 (Mader 1972, [13]). *Es sei $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$. Jeder Graph mit $d(G) \geq 4k$ has einen $(k+1)$-verbundenen Teilgraphen H mit $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G) - k$.*

Beweis. Wir haben $\varepsilon(G) \geq 2k$ nach (1.1). Wir betrachten die Menge der Teilgraphen G' von G mit

$$|G'| \geq 2k \quad \text{ und } \quad ||G'|| > \varepsilon(G) \cdot (|G'| - k). \tag{1.2}$$

Diese Menge ist nicht leer, das G selbst drin liegt, da $|G| \geq \frac{d(G)+1}{2} \geq 2k$. Sei H ein Element dieser Menge, so dass kein H' mit $|H'| < |H|$ in der Menge ist. H ist also von minimaler Ordnung unter den in der Menge vertretenen Graphen.

$|H| > 2k$, denn sonst wäre $|H| = 2k$ und dann $||H|| > \varepsilon(G)k \geq 2k^2 > \binom{|H|}{2}$, die Gesamtzahl aller möglichen Kanten.

Da $|H|$ minimal ist, ist $\delta(H) > \varepsilon(G) \geq 2k$, denn sonst könnten wir wie im Beweis von Proposition 1.7 einen Vertex x mit $d_H(x) \leq \varepsilon(G)$ aus H wegnehmen und erhielten einen echt kleineren Graphen, der immer noch die Eigenschaften (1.2) hat.

Insbesondere ist $|H| \geq \delta(H)+1 \geq \varepsilon(G) > 0$. Wir können die zweite Gleichung in (1.2) auf beiden Seiten durch $|H|$ dividieren und erhalten $\frac{||H||}{|H|} > \varepsilon(G) - k$, wie gefordert.

Nun zeigen wir, dass H $(k+1)$-verbunden ist. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es eine Trennung U_1, U_2 von H mit $|U_1 \cap U_2| \leq k$. Dann hat jeder

Vertex $v \in U_1 \setminus U_2$ alle seine $d_H(v) \geq \delta(H) > 2k$ Vertizes in $H_1 = H(U_1)$ hat, ist $|H_1| \geq \varepsilon(G) \geq 2k$, ebenso $|H_2| \geq \varepsilon(G) \geq 2k$. Da H_1 und H_2 beide von echt kleinerer Ordnung als H sind, erfüllt keiner von beiden die Bedingung (1.2). Das liegt an der zweiten Konjunktion von (1.2). Also ist $||H_i|| \leq \varepsilon(G)(|H_i| - k)$ und

$$\begin{aligned} ||H|| &\leq ||H_1|| + ||H_2|| \\ &\leq \varepsilon(G)(|H_1| + |H_2| - 2k) \\ &\leq \varepsilon(G)(|H| - k) \qquad (\text{ da } |H_1 \cap H_2| \leq k). \end{aligned}$$

Dies widerspricht (1.2) für H. □

1.2 Bäume und Wälder

Definition 1.2. Ein Graph T heißt (graphentheoretischer) Baum, falls T verbunden ist und keinen Zykel hat.

Definition 1.3. Es sei T ein Baum. Wir halten einen Knoten $r \in T$ als Wurzel fest. Jedes r taugt als Wurzel. Dann definieren wir

$$x \leq_{T,r} y \quad :\Leftrightarrow \quad x \in rTy.$$

Erinnerung: Hierbei ist rTy der eindeutige Pfad von r nach y.

Lemma 1.4. *$\leq_{T,r}$ ist eine Halbordnung, d.h. reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.*

Definition 1.5. Es sei G ein verbundener Graph. Ein Graph (T, r) mit Wurzel heißt *normaler, aufspannender Baum, normal spanning tree, depth first search tree* oder *Trémeaux-Baum*, wenn das Tripel (G, T, r) folgende Eigenschaften hat:

(1) T ist ein Baum, $V(T) = V(G)$, $E(T) \subseteq E(G)$,

(2) $r \in T$ heißt die Wurzel von T,

(3) für jede Kante $\{x, y\} \in E(G)$ gilt: $x \leq_{T,r} y$ oder $y \leq_{T,r} y$.

Proposition 1.6 (Trémeaux)**.** *Jeder verbundene endliche Graph G hat einen normalen aufspannenden Baum T.*

Beweis. Wir wählen einen Knoten $r \in T$ als Wurzel und setzen $v_0 = r$. Induktiv über $i \leq n \leq |G| - 1$ wählen wir paarweise verschiedene v_i und eine T-Kante zwischen v_i und einem v_j, $j < i$, so dass:

$$\begin{array}{l} \forall j, j' \leq i, (j \neq j' \to v_{j'} \neq v_j) \\ (\{v_0, \dots, v_i\}, E(T) \cap [\{v_0, \dots, v_i\}]^2, r) \\ \text{ ein normaler aufspannender Baum des Graphen} \\ G(\{v_0, \dots, v_i\}) \text{ mit Wurzel } r \text{ ist.} \end{array} \tag{1.3}$$

Anfang: Für $i = 0$ und $v_0 = r$ trifft (1.3) zu. Falls $i = n - 1$, sind wir fertig. Induktionsschritt: Falls $i < n - 1$, so gibt es noch mindestens einen Knoten in $G \setminus \{v_0, \dots, v_i\}$.

1. Fall: Es gibt ein $v \in G \setminus \{v_0, \ldots, v_i\}$, das mit v_i verbunden ist. Wir wählen (willkürlich, wenn es mehrere gibt) so ein v und setzen $v_{i+1} = v$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(T)$. Beachten Sie: $\{v_{i+1}, v_j\} \in E(G)$ für $j < i$ ist möglich, denn G hat vielleicht Zykeln. Jedoch ist es nach Konstruktion nicht möglich, dass v_{i+1} mit einem Knoten v_k, $k < i + 1$, außerhalb von rTv_i verbunden ist. Schon früher konstruierte Teile des spanning trees $(\{v_0, \ldots, v_i\}, E(T) \cap [\{v_0, \ldots, v_i\}]^2)$, die nicht auf rTv_i liegen, erfüllen Konstruktionsvorschrift in Fall 1 und in Fall 2, d.h, bei deren Konstruktion darf man nur in Richtung Wurzel zurück gehen, wenn es keinen weiteren noch nicht benannten Knoten in der Nachbarschaft gibt. Also gibt es dort kein v_k, $k \leq i$, das mit v_{i+1} in $E(G)$ ist. Unsere Konstruktion $(\{v_0, \ldots, v_{i+1}\}, E(T) \cap [\{v_0, \ldots, v_{i+1}\}]^2)$ erfüllt die Induktionsbedingung (1.3).

2. Fall: Es gibt kein $v \in G \setminus \{v_0, \ldots, v_i\}$, das mit v_i verbunden ist. Wir gehen längs rTv_i zurück in Richtung Wurzel. Beim ersten (auf dem Rückweg, dies ist wichtig, denn G hat womöglich Zykeln!) v_j, das noch einen Nachbarn v in $G \setminus \{v_0, \ldots, v_i\}$ hat, wählen wir so einen Nachbarn als $v_{i+1} = v$ und setzen $\{v_j, v_{i+1}\} \in E(T)$. Beachten Sie: Wiederum ist $\{v_{i+1}, v_k\} \in E(G)$ für ein $k < j$ mit $v_k \in rTv_{i+1}$ möglich, denn G hat vielleicht Zykeln. Jedoch ist es nach Konstruktion nicht möglich, dass v_{i+1} mit einem Knoten v_k, $k < i+1$, außerhalb von rTv_j verbunden ist, denn v_j ist der erste Knoten mit noch nicht ganz aufgezählter Nachbarschaft auf dem Rückweg, also scheiden die $v_k \in rTv_i \setminus rTv_j$ als mögliche $E(G)$-Nachbarn von v_{i+1} aus. Andere schon früher konstruierte Teile des spanning trees $(\{v_0, \ldots, v_i\}, E(T) \cap [\{v_0, \ldots, v_i\}]^2)$ bis einschließlich Schritt i erfüllen Konstruktionsvorschrift in Fall 1 und in Fall 2, d.h, bei deren Konstruktion darf man nur in Richtung Wurzel zurück gehen, wenn es keinen weiteren noch nicht benannten Knoten in der Nachbarschaft gibt, also gibt es auf diesen anderen Teilen kein v_k, $k \leq i$, das mit v_{i+1} in $E(G)$ ist. Nun ist die Induktionsbedingung (1.3) an der Stelle $i + 1$ erfüllt. □

1.3 Lineare Algebra und Graphen

Siehe auch [1], [2] und [6].

Kapitel 2

Szemerédi's Regularity Lemma

Definition 2.1. Es sei (V, E) ein Graph und X, Y seien nicht leere disjunkte Teilmengen von V. Dann sei $||X, Y||$ die Anzahl der Kanten von X nach Y. Die *Dichte des Paares* (X, Y) ist

$$d(X, Y) = \frac{||X, Y||}{|X| \cdot |Y|}.$$

Dies ist eine Zahl zwischen 0 und 1.

Definition 2.2. Es sei $\varepsilon \in (0, 1]$, A, B disjunkte Teilmengen von V. Das Paar (A, B) heißt *ε-regulär* , falls für alle $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ gilt: Wenn $|X| \geq \varepsilon|A|$ und $Y \geq \varepsilon|B|$, so ist $|d(X, Y) - d(A, B)| < \varepsilon$.

Definition 2.3. Es sei $\langle V_0, \ldots, V_k\rangle$ eine Partition von V in $k+1$ Teile. Der Teil V_0 heißt der Ausnahmeteil, er darf leer sein. Die anderen Teile sind nicht leer. Wir nennen die Partition ε-regulär , wenn

(1) $|V_0| \leq \varepsilon|V|$,

(2) $|V_1| = \cdots = |V_k|$.

(3) Bis auf höchstens εk^2 Ausnahmen sind alle Paare (V_i, V_j) für $1 \leq i \neq j \leq k$ ε-regulär.

Satz 2.4 (Regularity Lemma)**.** *Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $m \geq 1$ gibt es eine Zahl M so dass jeder Graph der Ordnung mindestens m[1] einen ε-reguläre Partition $\langle V_0, \ldots, V_k\rangle$ hat mit $m \leq k \leq M$.*

Wir werden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwenden. Es seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ und $\mu_1, \ldots, \mu_k$ reelle Zahlen > 0. Dann ist

$$\sum \frac{\varepsilon_i^2}{\mu_i} \geq \frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{\sum \mu_i}.$$

Dies folgt aus $\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq (\sum a_i b_i)^2$ mit $a_i = \sqrt{\mu_i}$ und $b_i = \varepsilon_i/\sqrt{\mu_i}$. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$.

[1] Hier steht tatsächlich klein m. Die Aussage mit M statt m hier ist geringfügig schwächer.

Definition 2.5.

(1) Wir definieren für disjunkte $A, B \subseteq V$ die *modifizierte Dichte*

$$q(A,B) = \frac{|A||B|}{n^2} d^2(A,B) = \frac{||A,B||^2}{n^2 \cdot |A||B|}.$$

(2) Für Partitionen (ohne Ausnahmemengen) $\mathcal{A}$ von A und $\mathcal{B}$ von B definieren wir

$$q(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \sum_{A' \in \mathcal{A}; B' \in \mathcal{B}} q(A', B'),$$

und für nur eine Partition $\mathcal{P} = \langle C_1, \ldots, C_k \rangle$ von V definieren wir

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i<j} q(C_i, C_j).$$

(3) Wenn $\mathcal{P} = \langle V_0, \ldots, V_k \rangle$ eine Ausnahmemenge hat, so definieren wir die Partition $\tilde{\mathcal{P}} = \langle \{v\} \mid v \in V_0 \rangle ^\frown \langle V_1, \ldots, V_k \rangle$ und setzen $q_1(\mathcal{P}) = q(\tilde{\mathcal{P}})$.

Lemma 2.6. *(1) Wenn C, D disjunkte Teilmengen von V sind und $\mathcal{C}$ eine Partition von C und $\mathcal{D}$ eine Partition von D, so ist $q(\mathcal{C},\mathcal{D}) \geq q(C, D)$.*

(2) Wenn $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ Partitionen von V sind und $\mathcal{P}'$ die Partition $\mathcal{P}$ verfeinert (alles ohne Ausnahmemengen), so ist $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P})$. Ein Partition $\mathcal{P}'$ verfeinert $\mathcal{P}$, falls jeder Teil von $\mathcal{P}$ die Vereinigung geeigneter Teile von $\mathcal{P}'$ ist.

Beweis. Es sei $\mathcal{C} = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ und $\mathcal{D} = \langle D_1, \ldots, D_\ell \rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned} q(\mathcal{C},\mathcal{D}) &= \sum_{i \leq n, j \leq \ell} q(C_i, D_j) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \frac{||C_i, D_j||^2}{|C_i||D_j|} \\ &\geq \frac{1}{n^2} \frac{(\sum_{i,j} ||C_i, D_j||)^2}{\sum_{i,j} |C_i||D_j|} \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{||C, D||^2}{(\sum_i |C_i|)(\sum_j |D_j|)} \\ &= q(C, D). \end{aligned}$$

(ii) Es sei $\mathcal{P} = \langle C_1, \ldots, C_k \rangle$ und für $i = 1, \ldots, k$ sei $\mathcal{C}_i$ die Zerlegung von C_i, die durch $\mathcal{P}'$ (auf C_i) erzeugt wird.

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i<j} q(C_i, C_j) \\ &\overset{(1)}{\leq} \sum_{i<j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \\ &\leq q(\mathcal{P}'), \end{aligned}$$

da $q(\mathcal{P}') = \sum_i q(\mathcal{C}_i) + \sum_{i<j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j)$. Letzteres gilt wegen der Definition von $q(\mathcal{P})$ in Definition 2.5(2): Die Einzelteile der Teile $\mathcal{C}_i$ müssen in allen aufsteigenden Kombinationen betrachtet werden. $\square$

Lemma 2.7. *Es sei (C,D) ein disjunktes Paar, das nicht ε-regulär ist. Dann gibt es Partitionen $\mathcal{C} = \langle C_1, C_2\rangle$ und $\mathcal{D} = \langle D_1, D_2\rangle$ von C und von D, so dass*

$$q(\mathcal{C},\mathcal{D}) \geq q(C,D) + \frac{\varepsilon^4|C||D|}{n^2}.$$

Beweis. Da (C,D) nicht ε-regulär ist, gibt es Zeugen $C_1 \subseteq C$ und $D_1 \subseteq D$, so dass $|C_1| \geq \varepsilon|C|$ und $|D_1| \geq \varepsilon|D|$ und $\varepsilon < |d(C_1,D_1) - d(C,D)| =: \eta$. Nun nehmen wir an, dass $d(C_1,D_1) - d(C,D) = \eta$. Es sei nun $C_2 = C \setminus C_1$, $D_2 = D \setminus D_1$ und $\mathcal{C} = \langle C_1, C_2\rangle$ und $\mathcal{D} = \langle D_1, D_2\rangle$. Wir schreiben $e = ||C,D||$, $c = |C|$, $c_i = |C_i|$, $d = |D|$, $d_i = |D_i|$, $e_{i,j} = ||C_i, D_j||$. e, c, c_i, d, d_i, $e_{i,j}$

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{C},\mathcal{D}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\frac{e_{i,j}^2}{c_i d_j} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{e_{1,1}^2}{c_1 d_1} + \sum_{i+j>2}\frac{e_{i,j}^2}{c_i d_j}\right) \\
&\overset{(CauchySchwartz)}{\geq} \frac{1}{n^2}\left(\frac{e_{1,1}^2}{c_1 d_1} + \frac{(e-e_{1,1})^2}{(cd - c_1 d_1)}\right).
\end{aligned}$$

Nun ist $e_{1,1} = c_1 d_1 e/cd + \eta c_1 d_1$ und daher ist

$$\begin{aligned}
n^2 q(\mathcal{C},\mathcal{D}) &\geq \frac{1}{c_1 d_1}\left(\frac{c_1 d_1 e}{cd} + \eta d_1 d_1\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{cd - c_1 d_1}\left(\frac{cd - d_1 d_1}{cd} e - \eta c_1 d_1\right)^2 \\
&= \frac{c_1 d_1 e^2}{c^2 d^2} + \frac{2e\eta c_1 d_1}{cd} + \eta^2 c_1 d_1 \\
&\quad + \frac{cd - c_1 d_1}{c^2 d^2} e^2 - \frac{2e\eta c_1 d_1}{cd} + \frac{\eta^2 c_1^2 d_1^2}{cd - c_1 d_1} \\
&\geq \frac{e^2}{cd} + \eta^2 c_1 d_1 \\
&\overset{\text{Vor.}}{\geq} \frac{e^2}{cd} + \varepsilon^4 cd.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.8. *Es sei $0 < \varepsilon \leq 1/4$ und $\mathcal{P}$ eine Partition von V in k Teile mit Ausnahmemenge C_0 der Größe $|C_0| \leq \varepsilon n$ und $|C_i| = c$. Wenn $\mathcal{P}$ nicht ε-regulär ist, dann gibt es eine Partition $\mathcal{P}' = \langle C_0', C_1', \ldots, C_\ell'\rangle$ mit Ausnahmemenge C_0' und $k \leq \ell \leq k4^{k+1}$, so dass $|C_0'| \leq |C_0| + n/2^k$ und alle $|C_i'|$ gleich groß sind und*

$$q_1(\mathcal{P}') \geq q_1(\mathcal{P}) + \varepsilon^5/2.$$

Es ist wichtig, dass dieses Wachstum nicht mehr durch n oder gar n^2 dividiert werden muss.

Korollar 2.9. *Es seien ε, V, n, $\mathcal{P}$, c und $\mathcal{P}'$ wie im Lemma. Falls $q_1(\mathcal{P}) + \varepsilon^5/2 > 1$, so ist $\mathcal{P}$ reguär.*

Beweis des Korollars: $q_1(\mathcal{P})$ ist definiert als $q(\tilde{\mathcal{P}})$ und ≤ 1.

Beweis. Für jedes Paar $1 \leq i < j \leq k$ definieren wir eine Partition $\mathcal{C}_{i,j}$ von C_i und eine Partition $\mathcal{C}_{j,i}$ von C_j. Falls das Paar ε-regulär ist, ist $\mathcal{C}_{i,j} = \{C_i\}$ und $\mathcal{C}_{j,i} = \{C_j\}$. Wenn das Paar nicht ε-regulär ist, dann gibt es nach Lemma 2.7 eine Zweierpartition $\mathcal{C}_{i,j}$ von C_i und eine Zweierpartition $\mathcal{C}_{j,i}$ von C_j, so dass

$$q(\mathcal{C}_{i,j}, \mathcal{C}_{j,i}) \geq q(C_i, C_j) + \varepsilon^4 \frac{|C_i||C_j|}{n^2} = q(C_i, C_j) + \frac{\varepsilon^4 c^2}{n^2}. \tag{2.1}$$

Für jedes $i = 1, \ldots, k$ nehmen wir nun die gröbste gemeinsame Partition $\mathcal{C}_i$ aller $\mathcal{C}_{i,j}$, $j \neq i$. Das sind maximal 2^{k-1} Teile. Nun nehmen wir die neue Startpartition mit dem alten Ausnahmeteil

$$\mathcal{C} = \{C_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i.$$

Diese hat

$$1 + k \cdot 2^{k-1} \geq |\mathcal{C}| \geq k + 1. \tag{2.2}$$

Wir setzen $\mathcal{C}_0 = \{\{v\} \mid v \in C_0\}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{P}$ nicht ε-regulär, also gibt es mehr als εk^2 Paare (i, j), so dass $\mathcal{C}_{i,j}$ zwei Teile hat. Nach Lemma 2.6(1) und unserer Definition von q_1 haben wir nun

$$\begin{aligned}
q_1(\mathcal{C}) &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) + \sum_{1 \leq i \leq k} q(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_i) + \sum_{0 \leq i \leq k} q(\mathcal{C}_i) \\
&\geq \sum_{1 \leq i < j \leq k} q(\mathcal{C}_{i,j}, \mathcal{C}_{j,i}) + \sum_{1 \leq i \leq k} q(\mathcal{C}_0, \{C_i\}) + q(\mathcal{C}_0) \\
&\overset{(2.1)}{\geq} \sum_{1 \leq i < j \leq k} q(C_i, C_j) + \varepsilon k^2 \frac{\varepsilon^4 c^2}{n^2} + \sum_{1 \leq i \leq k} q(\mathcal{C}_0, \{C_i\}) + q(\mathcal{C}_0) \\
&\geq q_1(\mathcal{P}) + \varepsilon^5 \left(\frac{kc}{n}\right)^2 \\
&\geq q_1(\mathcal{P}) + \varepsilon^5/2.
\end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung nutzen wir:

$$\begin{aligned}
ck + \varepsilon n &\geq n \\
ck + n/4 &\geq n \\
ck &\geq \frac{3}{4} n \geq \frac{n}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir die Teile von $\mathcal{C}$ ohne die Ausnahmemenge noch alle gleich groß machen.

1. Fall: $c < 4^k$. Die Ausgangsteile waren also schon klein. Dann können wir alles in Einermengen aufteilen und erhalten $\ell = c \cdot k$ Einermengen. Da $k \leq \ell < k4^k$, ist die Partition $\mathcal{P}'$ wie verlangt oder $\mathcal{P}'$ ist ε-regulär.

2. Fall $c \geq 4^k$. Wir legen ℓ viele paarweise disjunkte Mengen $C'_1, \ldots, C'_\ell$ der Größe $d := \lfloor \frac{c}{4^k} \rfloor \geq 1$, so dass jedes C'_i Teilmenge eines $C \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$ ist und

setzen $C_0' = V \setminus \bigcup\{C_i' \mid i \leq \ell\}$. Dann ist $\mathcal{P}' = \langle C_0', \dots, C_\ell' \rangle$ eine Partition von V. Die abgeleitetet Partition $\tilde{\mathcal{P}'}$ verfeinert $\tilde{\mathcal{C}}$ und daher ist

$$q_1(\mathcal{P}') \geq q_1(\mathcal{C}) \geq q_1(\mathcal{P}) + \varepsilon^5/2$$

nach Lemma 2.6(2). Da jedes C_i' außer C_0' in einem der C_j liegt und in jedem C_j höchstens $c/d \leq 4^{k+1}$ Mengen C_i' liegen, ist $k \leq \ell \leq k4^{k+1}$. Die $C_1', \dots, C_\ell'$ überdecken alle bis auf höchsten d Knoten von jedem $C \in \mathcal{C}$ außer von C_0. Daher ist

$$\begin{aligned} |C_0'| &= |C_0| + d|\mathcal{C}| \\ &\leq |C_0| + \frac{c}{4^k}k2^k \\ &= |C_0| + \frac{ck}{2^k} \\ &\leq |C_0| + \frac{n}{2^k} \end{aligned}$$

□

Ende des Beweises des Satzes 2.4:

Beweis. Es seien $\varepsilon > 0$ und $m \in \omega$ gegeben, ohne Beschränkung können $\varepsilon \leq 1/4$ annehmen. Es sei $s := 2/\varepsilon^5$. Dies ist die maximale Anzahl der Wiederholung der Verfeinerungs-Operation vom Beweis des vorigen Lemmas, denn $q_1(\mathcal{P}) \leq 1$. Bevor $q_1(\mathcal{P})$ über 1 springt, wird Regularität erreicht. Außerdem muss zu Beginn jeder Wiederholung das C_0 vom jeweiligen Konstruktionsschritt $\leq \varepsilon n$ sein. In jedem Schritt kann C_0 um $n/2^\ell \leq n/2^k$ wachsen. Wir starten daher mit einem $m \leq k$ so groß, dass s Vergrößerungen von $|C_0| < k$ um jeweils maximal $n/2^k$ uns immer noch $|C_0| \leq \frac{1}{2}n\varepsilon$ bescheren. Es sei also $2^{k-1} \geq s/\varepsilon$ und $k \geq m$. Dann ist $s/2^k \leq \varepsilon/2$, und

$$k + \frac{s}{2^k}n \leq \varepsilon n$$

für $n \geq 2k/\varepsilon$. Nun wählen wir M, eine obere Schranke für die Anzahl der nicht Ausnahme-Teile der Partitionen aus Lemma 2.7. In jedem Schritt wächst diese Anzahl der Teile vom Ausgangswert r auf maximal $r4^{r+1}$ Teile. Es sei $f(x) = x4^{x+1}$. Nun setzen wir

$$M := \max\{f^s(k), 2k/\varepsilon\}.$$

Dann ist

$$k \leq \frac{\varepsilon M}{2} \leq \varepsilon n.$$

Hier schreiben wir f^s für die s-malige Anwendung von f. Nun sei G mit $|G| \geq m$ gegeben und es sei $n = |G|$. Wir zeigen, dass G eine ε-reguläre Partition $\langle V_0, V_1, \dots, V_k \rangle$ mit $m \leq k \leq M$ hat. Falls $n \leq M$, können wir G in n Einermengen unterteilen und sind fertig. Falls $n > M$, sei $C_0 \subseteq V$ minimal, so dass k die Zahl $|V \setminus C_0|$ dividiert und sei $\{C_1, \dots, C_k\}$ irgendeine Partition von $V \setminus C_0$ in gleich große Teile. Dann ist $|C_0| < k$, und daher $|C_0| \leq \varepsilon n$. Nun wenden wir Lemma 2.7 auf $\langle C_0, C_1 \dots, C_k \rangle$ an und wiederholen dessen Anwendung höchstens s mal. Nach einem dieser Schritte erhalten wir eine ε-reguläre Partition von V in $\leq M$ Teile. □

Kapitel 3

Etwas wqo und bqo-Theorie

3.1 Well quasi orders

Definition 3.1. Es sei Q eine nicht leere Menge und $\leq \subseteq Q \times Q$. Die Struktur $(Q, \leq) = (Q, \leq_Q)$ heißt *Quasiordnung* oder *Präordnung* , wenn $\leq$ reflexiv $(\forall x \in Q, x \leq x)$ und transitiv $(\forall x, y, z \in Q, ((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z)$ ist. Wir schreiben $x < y$ für $x \leq y$ und $x \neq y$.

Definition 3.2. Eine antisymmetrische Quasiordnung heißt *Halbordnung.* Das Antisymmetriegesetz lautet: $\forall x, y((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$.

Eine Halbordnung, in der je zwei Elemente vergleichbar sind, heißt *lineare Ordnung.*

Definition 3.3. Es seien $(Q, \leq)$ eine Quasiordnung und $f \colon \mathbb{N} \to Q$. Die Funktion $f = \langle a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \rangle$ heißt Q-Folge. Ein Q-Folge heißt *gute (Q-)Folge*, falls es $m < n$ gibt mit $a_m \leq a_n$. Andernfalls heißt f *schlechte Folge.*

Eine Quasiordnung $(Q, \leq)$ heißt *wqo well quasi-order, wqo*, falls alle Q-Folgen gut sind.

Lemma 3.4. *Es sei $(Q, \leq)$ eine Quasiordnung. $(Q, \leq)$ ist wqo gdw es in Q keine unendlichen absteigenden Folgen und keine unendlichen Antiketten gibt. Hier ist Antikette im Vergleichbarkeitssinn gemeint: Je zwei verschiedene Elemente a, b einer Antikette sind unvergleichbar, also $a \not\leq b$ und $b \not\leq a$.*

Beweis. Für die Vorwärtsrichtung: Die beiden genannten Objekte sind schlechte Folgen.

Für die Rückwärtsrichtung: Es sei $\langle x_i \,|\, i \in \omega \rangle$ eine unendliche Folge. Wir färben $i < j$ durch die Funktion $c \colon [\omega]^2 \to \{0, 1, 2\}$:

$$c(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_i \leq x_j; \\ 1, & \text{falls } x_i > x_j; \\ 2, & \text{falls } x_i, x_j \text{ unvergleichbar sind.} \end{cases}$$

Nach dem Satz von Ramsey gibt es eine unendliche Teilmenge $H \subseteq \omega$, so dass $[H]^2$ einfarbig unter der Färbung c ist. Da es in Q keine unendlichen Antiketten und keine unendlichen absteigenden Ketten gibt, trägt $[H]^2$ die Farbe 0. Es gibt also $i < j$ (nämlich in in H), sodass $x_i \leq x_j$. Dies war zu zeigen. □

Definition 3.5. Es sei $(Q, \leq)$ eine Quasiordnung, und es seien $a, b \in [Q]^{<\omega}$. Wir definieren: $a \leq b$, wenn $a = \emptyset$ oder wenn es eine injektive Funktion $f \colon a \to b$ gibt, so dass $\forall q \in a, q \leq f(q)$.

Satz 3.6 (Higmans Lemma, [8])**.** *Wenn* $(Q, \leq)$ *ein wqo ist, so ist auch* $([Q]^{<\omega}, \leq)$ *ein wqo.*

Beweis. (Nach einem eleganten Beweis von Nash-Williams.) Wir nehmen an, dass $([Q]^{<\omega}, \leq)$ kein wqo ist. Dann gibt es eine schlechte Folge. Wir wählen unter allen schlechten Folgen eine Folge $\langle A_i \mid i < \omega \rangle$ mit minimalem $|A_0|$. Wir halten nun A_0 fest. Es seien $A_0, \ldots, A_n$ schon festgehalten, so dass $\langle A_0, \ldots, A_n \rangle$ der Anfang einer schlechten Folge ist. Dann nehmen wir unter allen diesen schlechten Folgen eine mit minimalem $|A_{n+1}|$ und halten nun $A_0, \ldots, A_n, A_{n+1}$ fest. Da die Folgen schlecht sind, ist keines der $A_n = \emptyset$. Insgesamt ist dann $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$ eine schlechte Folge. Wir wählen nun für jedes n ein $a_n \in A_n$ und setzen $B_n = A_n \setminus \{a_n\}$. Da Q ein wqo ist, gibt es nach Lemma 3.4 eine streng aufsteigende Teilfolge $\langle n_i \mid i < \omega \rangle$, so dass für alle $i < j$, $a_{n_i} \leq a_{n_j}$. Da die B_i kleiner sind als die minimalen schlechten Fortsetzungen, ist jede Fortsetzung von $A_0, \ldots, A_{n_0 - 1}, B_{n_0}$ gut. Inbesondere ist $\langle A_0 \ldots, A_{n_0-1} \rangle ^\frown \langle B_{n_i} \mid i \geq n_0 \rangle$ gut. Dann gibt es $k < \ell$, so dass $A_k \leq B_{n_\ell}$ oder $B_{n_k} \leq B_{n_\ell}$. Falls $A_k \leq B_{n_\ell}$, so ist $A_k \leq A_{n_\ell}$, im Widerspruch dazu, dass $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$ eine schlechte Folge ist. Falls $B_{n_k} \leq B_{n_\ell}$, so ist

$$A_{n_k} = B_{n_k} \cup \{a_{n_k}\} \leq B_{n_\ell} \cup \{a_{n_\ell}\} = A_{n_\ell},$$

denn man kann ein aufsteigendes $f \colon B_{n_k} \to B_{n_\ell}$ um das aufsteigende Paar (a_{n_k}, a_{n_ℓ}) erweitern. Wir haben also wiederum einen Widerspruch zur Tatsache, dass $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$ eine schlechte Folge ist.

□

Satz 3.7 (Kruskal, 1960 [11])**.** *Die Menge der endlichen graphentheoretischen Bäume ist zusammen mit der topologischen Minorenrelation ein wqo.*

Wir beweisen Kruskals Satz, indem wir eine feinere Relation auf der Menge der bewurzelten Bäume einführen.

Definition. Statt der topologischen Minorenrelation betrachten wir eine feinere Relation: Für jeden endlichen graphentheoretischen Baum T nehmen wir eine Wurzel $r \in T$ und erhalten dann eine Halbordnung $\leq_r$ auf dem bewurzelten (rooted) Baum (T, r): $x \leq_r y$, falls x auf dem Pfad von r nach y liegt.

Wir schreiben nun $(T, r) \prec (T', r')$, falls es eine Subdivision T_{sub} von T und $\leq_r$-$\leq_{r'}$- erhaltende Einbettung $f \colon (T_{\mathrm{sub}}, E(T_{\mathrm{sub}})) \to (T', E(T'))$ gibt. Die Wurzel muss nicht auf die Wurzel abgebildet werden, es muss nur gelten: f ist injektiv und

$$\begin{aligned} \forall x, y \in T_{\mathrm{sub}} \; (& (x \leq_r y \to f(x) \leq_{r'} f(y)) \wedge \\ & (\{x, y\} \in E(T_{\mathrm{sub}}) \leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(T'))). \end{aligned}$$

Nun überlegt man sich: Für T, T' gilt: Falls es Wurzeln r, r' gibt, sodass $(T, r) \prec (T', r')$, so ist T ein topologischer Minor von T'.

Wenn also die endlichen bewurzelten Bäume mit der Relation $\prec$ ein wqo sind, so sind auch die endlichen Bäume mit der topologischen Minorenrelation ein wqo.

Beweis. Wir beweisen nun den Satz von Kruskal in der stärkeren Version für bewurzelte Bäume und $\prec$. Wir nehmen an, dass die Menge der endlichen bewurzelten graphentheoretischen Bäume mit der Halbordnung $\prec$ kein wqo ist. Dann wählen wir induktiv über $i \in \omega$ eine schlechte Folge $\langle (T_i, r_i) \mid i < \omega \rangle$, so das für jedes i die Mächtigkeit $|T_i|$ minimal ist unter allen schlechten Folgen mit Anfang $\langle T_j \mid j < i \rangle$.

Jedes $T_i \setminus \{r_i\}$ setzt sich aus Unterbäumen $\hat{A}_i := \{A_{i,0}, \ldots A_{i,n_i}\}$ zusammen, die wir jeweils mit dem Nachbar $a_{i,\ell}$ von r_i in $A_{i,\ell}$ bewurzeln.

Wir zeigen nun folgende Zwischenbehauptung:
Die Menge $A = \{(A_{i,\ell}, a_{i,\ell}) \mid i < \omega, \ell \leq n_i\}$ ist mit $\prec$ ein wqo.

Annahme nicht. Dann gibt es eine schlechte Folge $\langle (T^k, r^k) \mid k < \omega \rangle$ in A. Es sei für $k \in \omega$, $(T^k, r^k) \in \hat{A}_{n(k)}$. Nun sei $n(k)$ minimal unter allen vorkommenden $n(k)$.

Dann ist nach der Minimalitätsvoraussetzung für die T_i die Folge

$$(T_0, r_0), \ldots, (T_{n(k)-1}, r_{n(k)-1}), (T^k, r^k)$$

kein Anfang einer schlechten Folge. Es gibt also ein gutes Paar in

$$\langle (T_0, r_0), \ldots, (T_{n(k)-1}, r_{n(k)-1}) \rangle {}^\frown \langle (T^\ell, r^\ell) \mid \ell \geq k \rangle.$$

1. Fall: Es gibt ein $\ell \leq n(k) - 1$ und ein $h \geq k$, so dass $(T_\ell, r_\ell) \prec (T^h, r^h)$. $h > \ell$ muss zum Hinteren Teil gehören, da der Anfang ja schlecht ist. Dann ist $n(h) \geq n(k)$, da $n(k)$ ja minimal ist. Dann bezeugt diese Einbettung $f \colon T_{\ell,\mathrm{sub}} \to T^h$ aber auch $(T_\ell, r_\ell) \prec (T_{n(h)}, r_{n(h)})$, denn wir haben ja nicht gefordert, dass die Wurzel auf die Wurzel geworfen wird, und die Identität bezeugt $(T^h, r^h) \prec (T_{n(h)}, r_{r(h)})$. Wir haben also einen Widerspruch zur Wahl der $\langle (T_i, r_i) \mid i < \omega \rangle$. [1]

2. Fall: Es gibt $\ell \geq k$ und ein $h > \ell$, so dass $(T^\ell, r^\ell) \prec (T^h, r^h)$. Dann war $\langle (T^k, r^k) \mid k < \omega \rangle$ keine schlechte Folge in A. Die Zwischenbehauptung ist also gezeigt.

Dann ist auch $([A]^\omega, \prec)$ eine wqo nach Higmans Lemma 3.6. Wir wenden dies auf $\langle \hat{A}_n \mid n < \omega \rangle$ an und erhalten ein Paar $m < n$ und $\hat{A}_m \prec \hat{A}_n$. Die bezeugende Abbildung f, bildet injektiv jedes $(A_{m,i}, a_{m,i}) \in \hat{A}_m$ auf ein $\prec$-größeres $(A_{n,j(i)}, a_{n,j(i)}) \in \hat{A}_n$ ab mit bezeugender Abbildung $f_{m,i,n,j}$ und bezeugender Subdivision $A_{m,i,\mathrm{sub}}$. (Die Abbildung $i \mapsto j(i)$ von n_i nach n_j ist also injektiv.)

Wir haben nun $(T_m, r_m) \prec (T_n, r_n)$:
Dies sieht man wie folgt. Wir bauen eine geeignete Subdivision $T_{m,\mathrm{sub}}$, indem wir in T_m für jedes $i \leq n_m$ zwischen r_m und $a_{m,i}$ genau t_i neue Knoten $(k_{i,0}, \ldots k_{i,t_i - 1})$ einfügen, falls $f_{m,i,n,j(i)}$ die root $a_{m,i}$ in $A_{m,i,\mathrm{sub}}$ nicht auf die root $A_{n,j(i)}$ abbildet, sondern auf einen Knoten $f_{m,i,n,j(i)}(a_{m,i})$, der im Graphen $A_{n,j(i)}$ t_i Punkte entfernt von $a_{n,j(i)}$ liegt. Es sei also $(a_{n,j(i)} = \ell_{i,0}, \ell_{i,1}, \ldots, \ell_{t_i} = f_{m,i,n,j(i)}(a_{m,i}))$ ein Pfad in $A_{n,j(i)}$. Wir setzen $f_i(k_{i,s}) = \ell_{i,s}$

[1] Diesen Fall habe ich in der Vorlesung im Dezember 2023 nicht richtig vorgestellt.

für $s = 0, \dots, t_i - 1$. Die Subdivision $T_{m,\text{sub}}$ von T_m enstehe aus den Subdivisionen von $A_{m,i}$, $i \leq n_m$, die für die $f_{m,i,n,j(i)}$ benötigt werden, und diesen zusätzlichen $k_{i,s}$, $s = \{0, \dots, t_i - 1\}$. Dann können wir eine $\prec$-Einbettung f von $(T_{m,\text{sub}}, r_m)$ in (T_n, r_n) bilden wie folgt:

$$f = \bigcup \{f_{m,i,n,j(i)} \cup f_i \mid i \leq n_m\} \cup \{(r_m, r_n)\},$$

und erhalten nun und somit einen Widerspruch. □

Satz 3.8 (Robertson und Seymour, 2004). *Die Menge der endlichen Graphen ist zusammen mit der Minorenrelation ein wqo.*

In Diestel findet man eine Beweisskizze. Der Beweis ist einige Hundert Seiten lang.

Definition 3.9. Es seien $(L, \leq_L)$, $(M, <_M)$ lineare Ordnungen. Wir schreiben $L \leq M$, wenn es eine *Einbettung (im ordnungstheoretischen Sinn)* von L in M gibt, d.h. eine injektive Funktion $f \colon L \to M$, so dass

$$\forall l_1 <_L l_2, f(l_1) <_M f(l_2).$$

Bemerkung 3.10. Da M linear genordnet ist, erhält so eine Einbettung auch die negierten Relationen:

$$\forall l_1 \not<_L l_2, f(l_1) \not<_M f(l_2).$$

Vermutung 3.11 (Fraïssé, 1954). *Die Menge der abzählbaren linearen Ordnungen mit der Einbettungsrelation ist ein wqo.*

3.2 Von den wqo zu den bqo

Satz 3.12 (Laver, 1971, [12]). *Die Menge der abzählbaren linearen Ordnungen ist mit der Einbettungsrelation ein wqo, sogar ein bqo.*

Wir studieren in der Vorlesung einen recht vollständigen Beweis dieses Satzes. Wir folgen hierzu (mit einigen caveats) Simpsons Kapitel “Bqo Theory and Fraïssé's Conjecture” in Mansfield Weitkamp [14].

Definition 3.13. Es sei $(Q, \leq)$ eine Quasiordnung. Wir definieren eine Relation $\leq$ auf $Q^{\mathbb{N}} = \{f \mid f \colon \mathbb{N} \to Q\}$ durch $f \leq g$, wenn es eine strikt aufsteigende Folge $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ gibt, so dass $\forall n, f(n) \leq g(a_n)$.

Definition 3.14 (Rado [19]). Rados wqo ist folgende Struktur. Die Grundmenge ist $Q = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$. Für $(i, j), (k, l) \in Q$ sei

$$(i, j) \leq (k, l) :\Leftrightarrow (i = k \wedge j \leq l) \vee j < k.$$

Hausaufgaben Blatt 9: Rados wqo ist eine wqo und Rados Q gibt mit der $Q^{\mathbb{N}}$-Bildung keine wqo.

Definition 3.15. Es sei (X, τ) ein topologischer Raum. D.h. X ist eine nicht leere Menge, und τ ist eine Topologie auf X. D.h. τ ist die Menge der offenen Mengen auf X. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist eine Topologie auf X, wenn folgendes gilt. Die leere Menge und X sind offen. Die Vereinigung beliebig vieler offenen Mengen ist offen. Der Schnitt endlich viele offener Mengen ist offen.

Definition 3.16. Eine Funktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Metrik*, falls sie folgende drei Eigenschaften hat:

1. $\forall x, y, d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$,
2. $\forall x, y, d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie) und
3. $\forall x, y, z, d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung).

Die von d erzeugte Topologie τ_d auf X ist die von der Basis

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) &= \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}; \\ \text{Basis} &= \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\} \end{aligned}$$

erzeugte Topologie auf X. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt, d.h. ein abzählbares S, so dass

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists y \in S,\ d(x, y) < \varepsilon.$$

Definition 3.17. $2^\omega = \{0, 1\}^\omega$ wird mit der Produkttopologie ausgestattet.

Der Raum $[\omega]^\omega$ wird mit der *metrischen Topologie* ausgestattet: Dies ist die Topologie, die durch die Produkttopologie auf 2^ω und die Injektion $\chi\colon [\omega]^\omega \to 2^\omega$, $A \mapsto \chi_A$ auf $[\omega]^\omega$ erzeugt wird.[2] Man kann eine Basis für die offenen Mengen der metrischen Topologie direkt angeben. Dazu definieren wir zunächst ein größeres System: Es sei $s \in [\omega]^{<\omega}$, $X, U \in [\omega]^\omega$,

$$\begin{aligned} s \sqsubseteq X \ &:\Leftrightarrow X \cap \{0, \dots, \max(s)\} = s; \\ [s, U] \ &= \{X \in [\omega]^\omega \mid s \sqsubseteq X \wedge X \subseteq s \cup U\}, \\ \text{Ellentuck-Basis} \ &= \{[s, U] \mid s \in [\omega]^{<\omega}, U \in [[\max(s) + 1, \omega)]^\omega\}. \end{aligned}$$

Statt $\{0, \dots, \max(s)\}$ liest man auch $(\max(s) + 1)$. Letzteres ist die von Neumann'sche Schreibweise für $\{0, \dots, \max(s)\}$. Wenn man in der Ellentuck-Basis nur $U = \omega$ zulässt, erhält man eine Basis für die *metrische Topologie* τ auf $[\omega]^\omega$. Diese wird durch die Metrik

$$d(A, B) = \frac{1}{\min((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) + 1}$$

für $A, B \in [\omega]^\omega$ erzeugt. Die durch die Ellentuck-Basis erzeugte Topologie auf $[\omega]^\omega$ heißt die *Ellentuck-Topologie* oder auch Exponentialtopologie.

Die Räume 2^ω, ω^ω (mit der Produkttopologie) und $[\omega]^\omega$ mit der metrischen Topologie haben jeweils eine Basis auf clopen Mengen. Man nennt solche Räume *nulldimensional*. $\mathbb{R}$ ist im topologischen Sinne eindimensional. Es gibt verschiedene Definitionen einer Dimension auf topologischen Rümen, Details siehe [4]. (Ende der Def.)

[2] Die metrische Topologie auf $[\omega]^\omega$ ist also die kleinste (= gröbste) Topologie auf dem Urbildraum, so dass die Injektion χ stetig ist.

Jede offene Menge ist Vereinigung von Basis-Mengen. Die Ellentuck-Topologie ist echt *feiner* als die metrische Topologie auf der Grundmenge $[\omega]^\omega$, d.h.: 1. Alle metrisch offenen Mengen sind Ellentuck-offen. 2. In der Ellentucktopologie gibt es offene Mengen, die in der metrischen Topologie nicht offen sind.

Definition 3.18. Es sei X eine nicht leere Menge. Auf X definiert man die *diskrete Metrik* durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = y; \\ 1, & \text{wenn } x \neq y. \end{cases}$$

Die durch die diskrete Metrik erzeugte Topologie heißt die *diskrete Topologie.*

Definition 3.19. Die Borel-σ-Algebra auf (X,τ) ist die $\subseteq$-kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf X, die $\tau \subseteq \mathcal{B}$ erfüllt. (Existenz: Der Schnitt von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra. $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra.)

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *σ-Algebra auf X*, wenn $\mathcal{A}$ die leere Menge und X enthält und gegen Komplemente und unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist.

Anschauliche Beschreibung von $(\aleph_1, \in)$. Dies ist eine Wohlordnung. Sie ist überabzählbar lang, d.h. für alle $f \colon \mathbb{N} \to \aleph_1$, f ist nicht surjektiv und das Bild von f ist sogar beschränkt, d.h, $\exists \gamma \in \aleph_1, \text{bild}(f) \cap [\gamma, \aleph_1) = \emptyset$. $\aleph_1$ ist kürzeste überabzählbare Wohlordnung. D.h. für jede überabzählbare Wohlordnung $(W,<)$ gilt: Es gibt eine Einbettung von $(\aleph_1, \in)$ in $(W,<)$.

Lemma 3.20 (Eigenschaften aller Borelmengen)**.** *Es sei (X,τ) ein topologischer Raum. Eine Aussage $\varphi(A)$ gilt für jede Borelmenge A, wenn sie für jedes offene und für jede abgeschlossene Mengen A gilt und sich auf Komplemente und auf abzählbare Vereinigungen vererbt, d.h.*

$$\forall \langle A_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle, \ (\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \varphi(A_i)) \to (\varphi(X \setminus A_0) \land \varphi(\bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\})). \tag{I}$$

Beweis. Die Borel-σ-Algebra auf (X,τ) ist die $\subseteq$-kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf X, die $\tau \subseteq \mathcal{B}$ und $\{X \setminus Y \mid Y \in \tau\} \subseteq \mathcal{B}$ erfüllt, also die offenen und die abgeschlossenen Mengen enthält, und gegen Komplemente und abzählbare Vereinigungen abgeschlossen ist.

Eine Aussage gilt für alle Elemente der σ-Algebra, wenn sie für die offenen und die abgeschlossenen Mengen gilt und sich ihre Wahrheit von Einzelmengen auf deren abzählbaren Vereinigung und auf deren Komplement weiterträgt. □

Definition 3.21. Es sei X ein vollständig metrisierbarer separabler Raum[3] Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *analytisch* oder Σ^1_1, wenn es eine Borelmenge $B \subseteq X \times X$ [4] gibt, so dass

$$A = \{x \mid \exists y \in X, (x,y) \in B\}.$$

[3] Diese Eigenschaften werden unter dem Namen „polnischer Raum” zusammengefasst.

[4] $X \times X$ ist mit der Produkttopologie von der Topologie auf X ausgestattet.

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *ko-analytisch* oder Π^1_1, wenn es eine Borelmenge $B \subseteq X \times X$ gibt, so dass

$$A = \{x \mid \forall y \in X, (x, y) \in B\}.$$

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt Σ^1_{n+1}, wenn es eine Π^1_n Menge $B \subseteq X \times X$ gibt, so dass

$$A = \{x \mid \exists y \in X, (x, y) \in B\}.$$

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt Π^1_{n+1}, wenn es eine Σ^1_n Menge $B \subseteq X \times X$ gibt, so dass

$$A = \{x \mid \forall y \in X, (x, y) \in B\}.$$

Eine Menge in $\bigcup\{\Pi^1_n \cup \Sigma^1_n \mid n < \omega\}$ heißt *projektiv*. Statt X steht meistens $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, ω^ω oder $[\omega]^\omega$ (mit der metrischen Topologie).

Lemma 3.22 (Galvin-Prikry für offene Mengen)**.** *Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge von $[A]^\omega$. Dann gibt es ein $B \in [A]^\omega$, so dass $[B]^\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$ oder $[B]^\omega \subseteq \mathcal{O}$.*

Definition 3.23. $\mathcal{O} \subseteq [\omega]^\omega$ gegeben.

(1) $[s, U]$ ist *gut (für $\mathcal{O}$)*, wenn $\forall V \in [U]^\omega, [s, V] \not\subseteq \mathcal{O}$.

(2) Für $s \in [\omega]^{<\omega}$ und $U \in [\omega]^\omega$ sei

$$U/s = U \setminus \{0, \dots, \max(s)\}.$$

Gelesen wird dies als "U past/after/beyond s."[5]

(2) $[s, U]$ ist *sehr gut (für $\mathcal{O}$)*, wenn $[s, U]$ gut ist und für jedes $n \in U/s$, $[s \cup \{n\}, U/\{n\}]$ gut ist.

Lemma 3.24. *Es sei $[s, U]$ gut für $\mathcal{O}$. Dann gibt es ein $V \in [U]^\omega$, so dass $[s, V]$ sehr gut für $\mathcal{O}$ ist.*

Beweis. Annahme nicht. Wir setzen $W_0 = U/s$. Dann ist $[s, W_0] = [s, W_0/s]$ gut.

Induktionsvoraussetzung für i: Es seien $W_0, \dots, W_i$ und $n_0, \dots, n_{i-1}$ gewählt, so dass $[s, W_i/n_{i-1}]$ gut aber nicht sehr gut ist. (Im Fall $i = 0$ lesen wir W_0 statt W_0/n_{-1}.)

Induktionsschritt: Dann gibt es ein $n_i \in W_i/n_{i-1}$, so dass $[s \cup \{n_i\}, W_i/\{n_i\}]$ nicht gut ist. Es gibt also ein $W_{i+1} \subseteq W_i/\{n_i\}$, so dass $[s \cup \{n_i\}, W_{i+1}] \subseteq \mathcal{O}$.

Wir setzen nun $V = \{n_i \mid i < \omega\}$. Dann ist $[s, V] \subseteq \mathcal{Q}$ und somit war, im Gegensatz zur Voraussetzung des Lemmas, $[s, U]$ nicht gut. $\square$

Beweis des Lemmas von Galvin und Prikry für offene und für abgeschlossene Mengen: Da die Funktion i, die ω bijektiv und ordnungstreu auf A abbildet zu einer stetigen Funktion h_i von $[\omega]^\omega$ auf $[A]^\omega$ hochgehoben werden kann, können wir $A = \omega$ annehmen. Die Hochhebung geht so: Es ist $h_i(X) = \{i(x) \mid x \in X\}$ für $X \in [\omega]^\omega$.

[5] Manche Autoren schreiben statt $U/\{n\}$ nur U/n. Dies steht im Konflikt mit der von-Neumann-Interpretation, dass $n = \{0, \dots, n-1\}$.

Wenn es ein $U \in [\omega]^\omega$ gibt, so dass $[U]^\omega \subseteq \mathcal{O}$, so sind wir fertig. Wir arbeite also nun unter der Fallvoraussetzung: $[\emptyset, \omega]$ ist gut. Wir setzen $U_0 = \omega$.

Es seien nun $U_0, \dots, U_i$ und $n_0, \dots, n_{i-1}$ gewählt, so dass $n_{i-1} \in U_{i-1}$ und $n_{i-1} < \min(U_i)$ und für $s \subseteq \{n_0, \dots, n_{i-1}\}$ mit $n_{i-1} \in s$ die Menge $[s, U_i]$ gut ist. (Dies ist also die Induktionsbehauptung. Nun zeigen wir die Behauptung für $i+1$.) Es sei s_k, $k < 2^{i-1}$, eine Aufzählung aller Teilmengen s von $\{n_0, \dots, n_{i-1}\}$ mit $n_{i-1} \in s$. Sukzessive über $k < 2^{i-1}$ wählen wir nun $V_{i,0} = U_i$, $V_{i,k+1} \subseteq V_{i,k}$, so dass $[s_k, V_{i,k+1}]$ sehr gut ist. Hierbei benutzen wir dass aus $[s, U]$ gut auch $[s, U']$ gut folgt für $U' \in [U]^\omega$, und wir benutzen das Lemma 3.24. Am Schluss setzen wir $V_i = V_{i,2^{i-1}}$, also das letzte, $\subseteq$-kleinste, für alle s_k monochromatische $V_{i,j}$. Wir wählen $n_i = \min(V_i) \subseteq U_i$ und $U_{i+1} = V_i/\{n_i\}$. Nun ist für alle $s \subseteq \{n_0, \dots, n_i\}$ (mit $n_i \in s$ — durch Induktion jedoch auch für alle s' mit kleinerem Maximum! Denn es gilt: Wenn $[s, U]$ gut ist und $U' \in [U]^\omega$, so ist auch $[s, U']$ gut) die Menge $[s, U_{i+1}]$ gut. Wir haben also den Induktionsschritt gezeigt.

Wir setzen $X = \{n_i \mid i < \omega\}$. Wir zeigen $[X]^\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Annahme nicht. Dann gibt es ein $Y \in [X]^\omega \cap \mathcal{O}$. Da $\mathcal{O}$ (in der metrischen Topologie) offen ist, gibt es eine Basismenge $[s, \omega] \subseteq \mathcal{O}$, so dass $Y \in [s, \omega] \subseteq \mathcal{O}$. (Hier könnte man auch eine Ellentuck-offene Menge $[s, W]$ statt $[s, \omega]$ schreiben. Der Beweis funktioniert also auch für die umfassendere Ellentuck-Topologie. Hier bräche der Beweis mit der Simpson-Definition von $[s, U]$ zusammen. Wir brauchen ja, dass die $[s, U]$ mindestens feiner sind als die metrisch offenen Mengen.)

Dann ist $Y \cap \{n_0, \dots, n_i\} = s$. Nach Konstruktion ist $Y/s \subseteq U_i$. Dann ist $[s, U_i] \subseteq [s, \omega] \subseteq \mathcal{O}$. Die Ausgangsmenge $[s, U_i]$ ist also nicht gut. Widerspruch. Es ist also $[X]^\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

Satz 3.25 (Galvin-Prikry für Borelmengen, [5])**.** *Es sei $\mathcal{B}$ eine Borel-Teilmenge von $[\omega]^\omega$ und es sei $A \in [\omega]^\omega$. Dann gibt es ein $B \in [A]^\omega$, so dass $[B]^\omega \cap \mathcal{B} = \emptyset$ oder $[B]^\omega \subseteq \mathcal{B}$.*

Beweis. Für die offenen und die abgeschlossenen Mengen $\mathcal{B}$ haben wir die Behauptung in Lemma 3.22 gezeigt.

Es sei nun $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_i \mid i < \omega\}$ und für jedes $\mathcal{B}_i$ sei die Aussage schon gezeigt. Wir setzen $A_0 = A$. Es seien nun $A_0, \dots, A_i$ und $n_0, \dots, n_{i-1}$ gewählt, so dass $n_{i-1} = \min(A_{i-1})$ und für $s \subseteq \{n_0, \dots, n_{i-1}\}$ die Menge $[s, A_i]$ die Menge $\mathcal{B}_{i-1}$ entscheidet, d.h. $[s, A_i] \cap \mathcal{B}_{i-1} = \emptyset$ oder $[s, A_i] \subseteq \mathcal{B}_{i-1}$. (Dies ist also die Induktionsbehauptung. Nun zeigen wir die Behauptung nun für i und $\mathcal{B}_i$.)

Es sei $n_i = \min(A_i)$. Es sei s_k, $k < 2^{i+1}$, eine Aufzählung aller Teilmengen von $\{n_0, \dots, n_i\}$. Sukzessive über $k < 2^i$ wählen wir nun $V_{i,0} = A_i/\{n_i\}$, $V_{i,k+1} \subseteq V_{i,k}$, so dass $[s_k, V_{i,k+1}]$ die Menge $\mathcal{B}_i$ entscheidet. Hierbei benutzen wir dass aus $[s, U]$ entscheidet auch $[s, U']$ entscheidet folgt für jedes $U' \in [U]^\omega$, und wir benutzen die Induktionsvoraussetzung. Am Schluss setzen wir $A_{i+1} = V_{i,2^{i+1}}$, also das letzte, kleinste, für alle s_k monochromatische $V_{i,j}$. Wir haben also den Induktionsschritt gezeigt.

Wir setzen $Z = \{n_i \mid i < \omega\}$. Es sei $Y \in [Z]^\omega$ und $i \in \omega$. Es sei $s = Y \cap \{0, \dots, \max(s)\} = Y \cap \{n_0, \dots, n_i\}$. Dann gilt nach Konstruktion: $Y \in \mathcal{B}_i$ genau dann, wenn $[s, A_{i+1}] \subseteq \mathcal{B}_i$. Es ist also $\mathcal{B}_i$ offen in $[Z]^\omega$ für jedes i (mit der

Spurtopologie, die von $([\omega]^\omega, \tau_{\text{metrisch}})$ auf $[Z]^\omega$ erzeugt wird[6]. Dann ist auch $\mathcal{B}$ offen in $[Z]^\omega$. Nach Lemma 3.22 gibt es ein $Y \in [Z]^\omega$, das $\mathcal{B}$ entscheidet. □

Wenn (X, d) separabel ist, dann hat die Topologie τ_d eine abzählbare Basis $\{B_{\frac{1}{n+1}}(s) \mid s \in S, n \in \mathbb{N}\}$.

Satz 3.26 (Mathias 1976 [15])**.** *Es sei $A \in [\omega]^\omega$ und $f\colon [A]^\omega \to X$ für einen metrischen Raum X eine Borelfunktion. Dann ist das Bild von f separabel und es gibt ein $B \in [A]^\omega$, so dass $f \restriction [B]^\omega$ stetig ist.*

Beweis. Wir lagern den Beweis, dass Bild(f) separabel ist, in Lemma 3.43 aus. Es sei $\{U_i \mid i < \omega\}$ eine Basis für die offenen Mengen auf bild(f). Hier benutzen wir also, dass dieses Bild separabel ist. Wir setzen $A_0 = A$. Es seien nun $A_0, \dots, A_i$ und $n_0, \dots, n_{i-1}$ gewählt, so dass $n_{i-1} = \min(A_{i-1})$ und für $s \subseteq \{n_0, \dots, n_{i-1}\}$ mit $n_{i-1} \in s$ die Menge $[s, A_i]$ die Menge $f^{-1}[U_{i-1}]$ entscheidet. (Dies ist also die Induktionsbehauptung. Nun zeigen wir die Behauptung statt mit i mit $i+1$.)

Es sei $n_i = \min(A_i)$. Es sei s_k, $k < 2^{i+1}$, eine Aufzählung aller Teilmengen s von $\{n_0, \dots, n_i\}$. Sukzessive über $k < 2^{i+1}$ wählen wir nun $V_{i,0} = A_i/\{n_i\}$, $V_{i,k+1} \subseteq V_{i,k}$, so dass $[s_k, V_{i,k+1}]$ die Menge $f^{-1}[U_i]$ entscheidet. Hierbei benutzen wir dass aus "$[s, V]$ entscheidet" und $V' \in [V]^\omega$ auch "$[s, V']$ entscheidet" folgt, und Galvin-Prikry 3.25. Am Schluss setzen wir $A_{i+1} = V_{i,2^{i+1}}$, also das letzte, kleinste, für alle s_k bezüglich $f^{-1}[U_i]$ monochromatische $V_{i,j}$. Wir haben also den Induktionsschritt gezeigt.

Wir setzen $B = \{n_i \mid i < \omega\}$. Es sei $Y \in [B]^\omega$. Dann gilt $Y \in f^{-1}[U_i]$ gdw $[s, A_{i+1}] \subseteq f^{-1}[U_i]$ für $s = Y \cap \{n_0, \dots, n_i\}$. Da $[s, B/\{n_i\}] \subseteq [s, A_{i+1}]$, Es ist also $f^{-1}[U_i]$ offen (bezgl. der Spurtopologie, die von der metrischen Topologie auf $[B]^\omega$ erzeugt wird) in $[B]^\omega$ für jedes i. Dann ist $f \restriction [B]^\omega$ stetig. □

Definition 3.27. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt *perfekt*, wenn sie abgeschlossen ist und wenn jeder Punkt Häufungspunkt der Menge ist.

Ein Unterbaum P eines Baums $T \subseteq X^{<\omega}$ (mit $s \leq_T y$ falls $t \restriction \mathrm{dom}(s) = s$ als Halbordnung auf dem Baum $(T, \leq_T)$) heißt *perfekt*, wenn $P \neq \emptyset$ und $\forall p \in P, \exists p_1, p_2 \geq_P p, (p_1 \not\leq_P p_2 \wedge p_2 \not\leq_P p_1)$.

Wir geben ein Beispiel für Perfektheit im ersten Sinn.

Beispiel 3.28. Die *Cantormenge* ist

$$C = \bigcap \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

mit $A_0 = [0,1]_{\mathbb{R}}$,

$$A_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (A_n \cup (2 + A_n)),$$

wobei die Multiplikation und die Addition hochgehoben interpretiert werden: Es seien $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x + A = \{x + y \mid y \in A\}$ und $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot x \mid x \in A\}$.

Die Menge C ist abgeschlossen und perfekt und enthält kein nicht leeres offenes Intervall.

[6] In der Spurtopologie ist $\mathcal{B}_i$ auch abgeschlossen in $[Z]^\omega$.

Lemma 3.29. *Es gibt nur $|\mathbb{R}|$-viele offene Teilmengen von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wir nehmen als Basismengen nur Intervalle mit rationalen Endpunkten. Dies sind abzählbar viele. Jede offenen Teilmenge $0 = \bigcup\{(a_n, b_n) \mid n \in \omega\}$ mit geeigneten rationalen Zahlen a_n und b_n lässt sich als Funktion von ω nach $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ beschreiben. Es gibt $|\mathbb{R}| = |2^\omega| = |\omega^\omega|$ viele solche Funktionen. Es gibt auch genau $|\mathbb{R}|$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}$, denn als Beispiele kann man $\{(-\infty, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ nehmen. $\square$

Definition 3.30. Es seien $n \in \omega$, $s \in A^n$ und $a \in A$. Dann ist $s^\frown\langle a\rangle = t$ (ausgesprochen „s mit a angehängt/konkateniert") die Funktion $t \colon n+1 = \{0, \dots, n\} \to A$ mit $t \restriction n = s$ und $t(n) = a$.

Lemma 3.31. *Jede nicht leere perfekte Teilmenge von $\mathbb{R}$ kann mit einem Baumschema dargestellt werden und hat daher $|\mathbb{R}|$ viele Elemente.*

Beweis. Ein Baumschema ist eine $2^{<\omega}$ Folge $\langle I_s \mid s \in 2^{<\omega}\rangle$ von offenen nicht leeren Intervallen I_s mit rationalen Endpunkten, so dass für alle s, t:

1. $I_{s^\frown\langle 0\rangle} \cap I_{s^\frown\langle 1\rangle} = \emptyset$,
2. $I_t \subseteq I_s$ falls $s = t \restriction \mathrm{dom}(s)$.

Jede perfekte Menge M lässt sich durch ein Baumschema eindeutig beschreiben als $\langle I_s \mid s \in 2^{<\omega}\rangle$ beschreiben als

$$M = \{x \in 2^\omega \mid \exists f = f(x) \in 2^\omega, x \in \bigcap\{\mathrm{cl}(I_{f\restriction n}) \mid n \in \omega\}\}.$$

Wir wählen $I_\emptyset$, so dass $\mathrm{cl}(I_\emptyset) = [\min(M), \max(M)]$, falls M beschränkt ist, und $\mathrm{cl}(I_\emptyset) = (-\infty, \max(M)]$, falls zum Beispiel M nach unten unbegrenzt ist. Da jeder Punkt aus der perfekten Menge ein Häufungspunkt der Menge sein soll, kann M nicht einelementig sein. Es seien I_s für $s \in 2^{<n}$ gewählt, so dass zusätzlich für $i < n$,

$$\bigcup\{\mathrm{cl}(I_s) \mid s \in 2^i\} \supseteq M.$$

Für jedes $s \in 2^{n-1}$ gibt es in jedem I_s zwei verschiedene Elemente m_i von M. Wir nehmen $r_s \in \mathbb{Q}$, mit

$$m_1 < r_s < m_2$$

und setzen $I_{s^\frown\langle 0\rangle} = I_s \cap (-\infty, r_s)$, $I_{s^\frown\langle 1\rangle} = I_s \cap (r_s, \infty)$. Damit haben wir das Baumschema um das Niveau $\langle I_s \mid s \in 2^n\rangle$ erweitert.

Jeder Punkt $x \in M$ liegt in genau einem $\bigcap\{\mathrm{cl}(I_{f\restriction n}) \mid n < \omega\}$ für ein $f = f(x) \in 2^\omega$. $\square$

Mit zusätzlicher Sorgfalt kann man die I_s in schrumpfender Länge konstruieren, so dass für jedes $f \in \omega^\omega$, $\bigcap\{\mathrm{cl}(I_{f\restriction n}) \mid n < \omega\}$ einelementig ist. Hier braucht man jedoch in der Regel ω statt 2.

Lemma 3.32. *Es gibt eine Teilmenge T von $\mathbb{R}$, die keine perfekte Teilmenge enthält und $|T| = |\mathbb{R}|$ erfüllt.*

Beweis. Wir nehmen eine Aufzählung aller perfekter Teilmengen von $\mathbb{R}$, $\langle P_\alpha \,|\, \alpha < |\mathbb{R}|\rangle$ und eine Aufzählung $\langle r_\alpha \,|\, \alpha < |\mathbb{R}|\rangle$ aller reeller Zahlen. Jedes $|P_\alpha| = |\mathbb{R}|$. Dieses dreimalige Vorkommen der Mächtigkeit $|\mathbb{R}|$ erlaubt es uns nun die Bernstein-Diagonalisierungstechnik mit $\mu = |\mathbb{R}|$, $\mathcal{A} = \{P_\alpha \,|\, \alpha < \mu\}$ anzuwenden. Mit dem Lemma 3.33 ist der Beweis beendet. □

Lemma 3.33 (Bernsteinmenge für $\mathcal{A}$)**.** *Es seien μ eine unendliche Kardinalzahl, und es sei $\mathcal{A} = \{A_\alpha \,|\, \alpha < \mu\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen Teilmengen A_α von μ und jedes A_α soll Mächtigkeit μ haben. Dann gibt es eine Menge (in der Tat μ-viele) B, die mit jedem A_α einen nicht leeren Schnitt hat, aber auch aus jedem A_α mindestens einen Punkt auslässt.*

Die Menge B mit diesen Eigenschaften heißt Bernsteinmenge für $\mathcal{A}$ *nach Felix Bernstein.*

Beweis. Es sei $\langle A_\beta \,|\, \beta < \mu\rangle$ eine Aufzählung von $\mathcal{A}$.

Induktiv über $\beta < \mu$ reservieren wir zwei Elemente $a_{\beta,0} \neq a_{\beta,1} \in A_\beta \setminus \{a_{\alpha,j} \,|\, \alpha < \beta, j = 0, 1\}$. Da $|A_\beta| = \mu$ und wir nur $|\beta| < \mu$ viele Elemente wegnehmen, ist die Differenz nicht leer.

Dann nehmen wir $B = \{a_{\beta,0} \,|\, \beta \in \mu\}$.

Für Leserinnen und Leser, die Diagonalisierungen mögen, ist hier noch ein Beweis für μ viele paarweise disjunkte Bernsteinmengen. Induktiv über $\gamma < \mu$ wählen wir $a_{\beta,\gamma} \in \mu$ für $\beta < \gamma$ durch

$$a_{\beta,\gamma} \in A_\beta \setminus \{a_{\beta',\gamma'} \,|\, (\beta' < \gamma' < \gamma) \vee (\beta' < \beta < \gamma' = \gamma)\}.$$

Wir setzen $D_\alpha = \{a_{\alpha,\beta} \,|\, \alpha < \beta < \mu\}$. Dann ist $D_\alpha \in [A_\alpha]^\mu$ und die D_α sind paarweise disjunkt. Jedes D_α sei durch $\langle d_{\alpha,\beta} \,|\, \beta < \mu\rangle$ aufgezählt. Dann setzen wir $B_\beta = \{d_{\alpha,\beta} \,|\, \alpha < \mu\}$. B_β ist eine Bernsteinmenge. B_β schneidet jedes A_α und B_α ist nicht Obermenge eines A_α.

□

Definition 3.34. Es sei X eine Menge und $T \subseteq X^{<\omega}$ ein Baum. Das Symbol $[T]$ bezeichnet die Menge der Äste von $T \subseteq X^{<\omega}$:

$$[T] := \{a \in X^\omega \,|\, \forall n, a \restriction n \in T\}.$$

Mann nennt $[T]$ auf Englisch body oder auch rump von T. In unserer Vorlesung ist X meistens 2 oder ω.

Lemma 3.35 (Baumlemma 1)**.** *X sei eine Menge, die die diskrete Topologie trage (z.B. $X = \omega$ oder $X = 2$). Es sei $A \subseteq X^\omega$ nicht leer und abgeschlossen. Dann gibt es einen Baum $T \subseteq X^{<\omega}$, so dass $A = [T]$.*

Beweis. Wir setzen $T = \{a \restriction n \,|\, a \in A, n < \omega\}$. Mit $t \in T$ ist auch $t \restriction k \in T$ für jedes $k < \mathrm{dom}(t)$, T ist also ein Baum. Wir zeigen $A \subseteq [T]$: Es sei $a \in A$. Dann ist $a \in [T]$, da für alle n, $a \restriction n \in T$.

Nun zeigen wir $[T] \subseteq A$. Es sei $b \notin A$. Da A abschlossen ist, gibt es eine offene Umgebung O von b, die kein Element von A enthält. Nach Definition der Produkttopologie hat O eine Teilmenge von der Form $O(s) = \{c \in X^\omega \,|\, c \restriction$

$\mathrm{dom}(s) = s\}$, die b als Element enthält. Wir haben also $s = b \upharpoonright \mathrm{dom}(s)$. Wir setzen $\mathrm{dom}(s) = k$. Nun ist $b \upharpoonright k \notin T$, da für alle $a \in A$, $a \notin O(s)$, also $a \upharpoonright k \neq b \upharpoonright k$. Somit ist $b \notin [T]$. Wir haben also $2^\omega \setminus A \subseteq 2^\omega \setminus [T]$. □

Definition 3.36. Es sei X ein vollständig metrisierter separabler Raum und die Metrik d sei beschränkt.[7] Es sei A eine nicht leere Menge. Ein *Souslin-Schema* ist eine Folge

$$\langle F_s \mid s \in A^{<\omega} \rangle$$

von Teilmengen F_s von X so dass

(i) für alle $s \in A^{<\omega}$, $a \in A$, $\mathrm{cl}(F_{s ^\frown \langle a \rangle}) \subseteq F_s$

(ii) Für jedes $f \in A^\omega$, $\lim_{n \to \infty} \mathrm{diam}(F_{f \upharpoonright n}) = 0$.

Lemma 3.37 (Baumlemma 2)**.** *Es sei $\langle F_s \mid s \in A^{<\omega} \rangle$ ein Souslin-Schema auf X, A trage die diskrete Topologie und A^ω trage die Produkttopologie.*

(1) Dann ist $D = \{\alpha \in A^\omega \mid \forall n,\ F_{\alpha \upharpoonright n} \neq \emptyset\}$ abgeschlossen.

(2) Für jedes $\alpha \in D$ ist $\bigcap\{F_{\alpha \upharpoonright n} \mid n < \omega\}$ eine Einermenge.

(3) Die Funktion $f\colon D \to X$ mit $f(\alpha) = \bigcup\bigcap\{F_{\alpha \upharpoonright n} \mid n < \omega\}$ ist stetig. Falls für $i \neq j$, $F_{s ^\frown \langle i \rangle} \cap F_{s ^\frown \langle j \rangle} = \emptyset$, ist die Funktion f injektiv.

(4) Falls das Schema den ganzen Raum abdeckt in dem Sinn, dass für alle n, $\bigcup\{\mathrm{cl}(F_s) \mid s \in A^n\} = X$, dann ist f auch surjektiv.

Lemma 3.38 (Baumlemma 3)**.** *Es sei $D \subseteq \omega^\omega$ abgeschlossen. Dann ist D das Bild einer stetigen Funktion $f\colon \omega^\omega \to D$.*

Beweis. X aus dem vorigen Lemma wird als D von diesem Lemma gewählt. Da ω^ω und D beide eine abzählbare Basis aus clopen Mengen haben, kann man die F_s in einem Souslinschema clopen wählen. □

Satz 3.39 ([20, Theorem 2.6.9])**.** *Jeder vollständig metrisierbare separable Raum X ist das Bild einer injektiven stetigen Funktion mit einer abgeschlossenen Teilmenge D von ω^ω als Definitionsbereich.*

Beweis. Wir halten eine Metrik $d \leq 1$, die die Topologie erzeugt, fest.

Wir definieren ein Souslin-Schema $\{F_s \mid s \in \omega^\omega\}$ aus F_σ-Mengen mit der Disjunktheitseigenschaft aus Lemma 3.37. $F_\emptyset = X$. Es sei F_s definiert. Dann schreiben wir $F_s = \bigcup\{C_i \mid i \in \omega\}$ mit abgeschlossenen Mengen C_i vom Durchmesser $\leq \frac{1}{2^{|s|+1}}$. We sei nun $F_{s ^\frown \langle i \rangle} = C_i \setminus C_{i-1}$ mit $C_{-1} = \emptyset$. Dies ist F_σ, da jede offene Menge F_σ ist. Dann setzen wir $D = \{h \in \omega^\omega \mid \forall n, F_{h \upharpoonright n} \neq \emptyset\}$. Dies ist abgeschlossen. Für $g \in D$ setzen wir $f(g) :=$ das Element von $\bigcap\{F_{g \upharpoonright n} \mid n \in \omega\}$. Nun ist die Funktion f stetig. □

[7] Man überlegt sich, dass man jede Metrik zu einer beschränkten Metrik umnormieren kann, die dieselbe Topologie erzeugt. Aus $d(x, y) = |x - y|$ auf $\mathbb{R}$ kann zum Beispiel $d^b(x, y) = \arctan(|x - y|)$ machen.

Satz 3.40 ([20, Proposition 3.3.15]). *Jede Borelteilmenge B eines vollständig metrisierbaren separablen Raums X ist das Bild einer stetigen Bijektion $g\colon Z \to B$ mit einem vollständig metrisierbaren Raum Z als Definitionsbereich.*

Beweis. Es sei

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X \mid \exists Z, \exists f\colon Z \overset{\text{cont}}{\to} B\}$$

Wir zeigen $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$, die ganze σ-Algebra auf X.

Nach dem Lemma über die Induktion über alle Borelmengen, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ die offenen Mengen enthält und gegen Koplemente und gegen abzählbare Vereinigungen abgeschlossen ist.

Induktionsanfang: Jede offene Teilmenge und jede abgeschlossenen Teilmenge eines vollständig metrisierbaren Raums sind selbst vollständig metrisierbar, da jede G_δ-Menge dies erfüllt nach dem Satz von Alexandrov [20, Theorem 2.2.1].

Wir bauen die Borelmengen nun statt mit der Komplementbildung mit der Durchschnittsbildung und mit der Bildung disjunkter Vereinigungen auf. Man überlegt sich, dass man so genau alle Borelmengen erzeugen kann.

Abzählbarer Schnitt: Es seien B_0, $B_1, \ldots \in \mathcal{B}$. Wir nehmen Räume Z_i und stetige Bijektionen g_i mit $g_i\colon Z_i \to B_i$. Wir nehmen

$$Z = \{z \in \prod_i Z_i \mid g_0(z_0) = g_1(z_1) = \ldots\}.$$

Z ist eine abschlossene Teilmenge des vollständig metrisierbaren Raums $\prod_i Z_i$ und somit selbst vollständig metrisierbar. Wir setzen $g\colon Z \to X$, $g(z) = g_0(z_0)$. Dies ist injektiv und stetig und bildet Z auf $\bigcap\{B_i \mid i < \omega\}$ ab. Also ist $\mathcal{B}$ unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen.

Abzählbare disjunkte Vereinigung: Es seien B_0, $B_1, \dots \in \mathcal{B}$. Es seien B_0, $B_1 \dots \in \mathcal{B}$. Wir nehmen Räume Z_i und stetige Bijektionen g_i mit $g_i\colon Z_i \to B_i$. Es sei $Z = \bigoplus Z_i$ die topologische Summe der Räume, also die disjunkte Nebeneinanderstellung. Wir definieren $g\colon Z \to X$ durch $g(z) = g_i(z)$, falls $z \in Z_i$. Dann ist $g\colon Z \to \bigcup\{B_i \mid i < \omega\}$ stetig und bijektiv. □

Folgendes findet man gut in [20], und führte uns zur Arbeit an Lemma 3.37, Lemma 3.38, Satz 3.39 und Satz 3.40, damit wir gerüstet sind.

Lemma 3.41 ([20, Proposition 4.1.1.]). *Folgende sind äquivalent: Es sei X ein separabler vollständig metrisierbarer Raum und $A \subseteq X$.*

(1) A ist analytisch, d.h. $A = \{x \mid \exists y \in X, (x, y) \in B\}$ für eine Borelmenge $B \subseteq X \times X$.

(2) Es gibt einen separablen vollständig metrisierbaren Raum Y und $A = \{x \mid \exists y \in Y, (x, y) \in B\}$ für eine Borelmenge in $X \subseteq Y$

(3) A ist das stetige Bild von ω^ω, d.h., es gibt eine stetige Funktion $f\colon \omega^\omega \to X$, $\mathrm{bild}(f) = A$.

(3') A ist das Borel-Bild von ω^ω, d.h., es gibt eine Borelfunktion $f\colon \omega^\omega \to X$, $\mathrm{bild}(f) = A$.

(4) Es gibt eine abgeschlossene Menge $C \subseteq X \times \omega^\omega$, so dass $A = \{x \mid \exists y \in \omega^\omega, (x,y) \in C\}$.

(4') Es gibt eine Borelmenge $C \subseteq X \times \omega^\omega$, so dass $A = \{x \mid \exists y \in \omega^\omega, (x,y) \in C\}$.

Beweis. (1) nach (2) ist klar.

(2) nach (3): Nach Lemma 3.38, Satz 3.39 und Satz 3.40 gibt es eine stetige surjektive Funktion $g\colon \omega^\omega \to B$. Dann ist die Komposition $f = \pi_X \circ g$ stetig. Dann ist $\mathrm{bild}(f) = A$.

(3) nach (4): Der Graph jeder stetigen Funktion $f\colon \omega^\omega \to X$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\omega^\omega \times X$. Der gespiegelte Graph $C = \{(y,x) \mid x \in \omega^\omega \wedge f(x) = y\}$ ist eine abschlossene Teilmenge von $X \times \omega^\omega$. Wir haben $A = \{y \mid \exists x \in \omega^\omega f(x) = y\} = \{y \mid \exists x \in \omega^\omega, (y,x) \in C\}$.

(4) nach (1): Die abgeschlossene Menge C ist Borel. Wir haben nun (1) mit $X = \omega^\omega$. Es sollte aber über die Koordinate in X projiziert werden. Nach Lemma 3.37 gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $D \subseteq X$ und eine stetige Bijektion $g\colon D \to \omega^\omega$. Dann ist $A = \{y \mid \exists x \in D, (y, g(x)) \in C\}$. Da g eine Borelfunktion ist, ist auch die Funktion $\tilde{g}\colon D \times Y \to Y \times \omega^\omega$ mit $\tilde{g}(x,y) = (y, g(x))$ eine Borelfunktion. Dann ist die Menge $\tilde{B} = \{(y,x) \mid x \in D \wedge (y, g(x)) \in C\}$ das Urbild von C unter $\tilde{g}$, auch Borel. Nun ist $A = \{y \mid \exists x \in X, (y,x) \in \tilde{B}\}$ wie in (1) gefordert.

Alternativ kann man wie in Srivastava erst noch eine weitere äquivalente Aussage zwischen (4) und (1) einfügen.: (5) Für jeden überabzählbaren Polnischen Raum Y gibt es eine G_δ Teilmenge $B \subseteq X \times Y$ mit Projektion A. Dann gibt es einen Beweis über den Satz von Lavrentiev [20, Proposition 2.2.6].

Nun noch zu dem Umweg über (3') und (4'):

(3) impliziert (3'). Von (3') auf (4') geht es wörtlich wie von (3) auf (4). Und unser Beweis von (4) nach (1) liefert auch (4') nach (1).

□

Satz 3.42 ([9, Theorem 11.18.], "the perfect set property for analytic sets")**.** *Jede überabzählbare analytische Menge hat eine perfekte Teilmenge.*

Beweis. Es sei $A \subseteq X$ eine analytische Menge. Wir wenden zuerst das Lemma 3.41 an und können $A = g[C]$ schreiben für eine stetige Funktion g und eine abgeschlossene Menge $C \subseteq \omega^\omega$.[8]

Cantor-Bendixson-Argument. Wie im Lemma 3.31 über perfekte Mengen zeigt man: Jede abgeschlossene Menge $C \in \omega^\omega$ hat die Form $C = [T] := \{a \in \omega^\omega \mid \forall n, a \restriction n \in T\}$, mit einem geeigneten (nicht notwendig perfekten) Baum $T \subseteq \omega^{<\omega}$. Für jeden Baum T und $s \in T$ sei

$$T_s = \{t \in T \mid t \trianglelefteq s \vee s \trianglelefteq t\}.$$

[8] Die letzten 6 Seiten der Vorlesung beschäftigten sich also mit der Änderung von einem Borel $f\colon [A]^\omega \to X$ (aus dem Satz von Mathias 3.26) zu einem stetigen $g\colon C \to X$ mit einem in ω^ω abgeschlossenen C, so dass $g[C] = f[[A]^\omega]$. Diese Menge ist analytisch. Für den Transport der Cantor-Bedixson-Ableitung $S \mapsto S'$ via g nützt man die Stetigkeit von g.

Hier ist $\trianglelefteq$ die Anfangsstück-Relation. Es ist also $[T_s] = [T] \cap O(s)$. Es sei $A = g[[T]]$ eine analytische Menge, g stetig. Wir definieren für jeden Baum S:

$$S' = \{s \in S \mid g([S_s]) \text{ überabzählbar}\}.$$

Für $\alpha < \aleph_1$ definieren wir $T^{(\alpha)}$: $T^{(0)} = T$. $T^{(\alpha+1)} = (T^{(\alpha)})'$, $T^{(\delta)} = \bigcap\{T^{(\beta)} \mid \beta < \delta\}$ für Limes δ. Es sei $\alpha < \aleph_1$ die kleinste Zahl, so dass $T^{(\alpha+1)} = T^{(\alpha)}$. Wenn $T^{(\alpha)} = \emptyset$, so ist

$$A = \bigcup\{g([T_s] \mid s \in T^{(\beta)} \setminus T^{(\beta+1)} \mid \beta < \alpha\}$$

abzählbar. Also ist $T^{(\alpha)}$ überabzählbar. Da $T^{(\alpha)} = T^{(\alpha+1)}$, ist es nun leicht, induktiv über $s \in 2^{<\omega}$ einen perfekten Baum in $P \subseteq T^{(\alpha)}$ zu finden, so dass $P = \{t(s) \mid s \in 2^{<\omega}\}$ und für $s \restriction \mathrm{dom}(s') = \mathrm{dom}(s')$, $t(s') \subseteq t(s)$ und für unvergleichbare s, s', $t(s)$ und $t(s')$ unvergleichbar sind und $g[[T^{(\alpha)}_{t(s)}]]$, $g[[T^{(\alpha)}_{t(s')}]]$ beide überabzählbar und disjunkt sind. Im Induktionsschritt wählt man zwei verschiedene Punkte aus $g[[T^{(\alpha)}_{t(s)}]]$, sagen wir a_0 und a_1. Dann haben diese positiven Abstand. Wie nehmen Kugeln vom Drittel-Abstand. Diese haben disjunkte offene Urbilder der Form $[T^{(\alpha)}_{t(s)}] \cap O(t_i)$ mit $t_i \supseteq t(s)^\frown\langle i\rangle$ für $i = 0, 1$. Wir setzen $t(s^\frown\langle i\rangle) = t_i$. Nun haben wir also den Baum

$$P = \{t(s) \mid s \in 2^{<\omega}\}.$$

Dann ist für jeden Ast $\langle t(h \restriction n) \mid n < \omega\rangle$ von P wegen der Stetigkeit von g und der Vollständigkeit der Raumes X

$$g(\bigcup t(h \restriction n) \mid n < \omega)) = \bigcup\bigcap\{g[T^{(\alpha)}_{t(h\restriction n)} \mid n < \omega\}.$$

Da $[P]$ kompakt ist, ist auch $g[[P]]$ kompakt, also inbesondere abgeschlossen. Da für jedes s die Menge $g[[T^{(\alpha)}_{t(s)}]]$ überabzählbar ist, ist jeder Punkt von $g[[P]]$ ein Häufungspunkt. Somit ist $g[[P]] \subseteq A$ perfekt. $\square$

Nun kommt endlich das ausgelagerte Lemma, das wirklich einen langen Ausflug in die Deskriptive Mengenlehre bedeutete. [9]

Lemma 3.43 ([14, Lemma 9.11])**.** *Es sei $A \in [\omega]^\omega$ und $f\colon [A]^\omega \to X$ für einen metrischen Raum X[10], f eine Borelfunktion. Hier ist $[A]^\omega$ mit der metrischen Topologie ausgestattet. Borelfunktion heißt: Für jede in (X, τ_X) offene Menge U ist $f^{-1}[U]$ ein Element der Borel-σ-Algebra auf $([A]^\omega, \tau_{\text{metrisch}})$. Dann ist das Bild von f separabel.*

Beweis. Annahme, der metrische Raum ist nicht separabel. Das heißt: Es gibt keine abzählbare dichte Teilmenge. Für $r > 0$ sei

$$A_r = \{S \subseteq X \mid \forall x, y \in S(x \neq y \to d(x, y) > r)\}.$$

[9] Wichtige Lehrbücher sind [16] und [10].

[10] Der Clou hier ist, dass X beliebig groß sein kann, zum Beispiel die Menge aller linearer Ordnungen auf ω. Die Menge wird mit der diskreten Topologie 3.18 zu einem metrischen Raum. Dies wird zu unserem Beweis von Lavers Satz beitragen.

Wenn alle Elemente von $A_{\frac{1}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ abählbar sind, dann ist X separabel. Dies sieht man wie folgt. In jedem A_r gibt es nach Zorn eine $\subseteq$-maximale Menge S_r. Für so ein maximales S_r gilt: Für $x \notin S_r$, gibt es ein $y \in S_r$ mit $d(x, y) \leq r$. Dann ist

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_{\frac{1}{n+1}}.$$

abzählbar und dicht in X.

Wenn X nicht separabel ist, dann gibt es also ein r mit einem überabzählbaren $S \in A_r$. So ein S ist abgeschlossen.

Nun sei $h \colon S \to T$ injektiv für ein $T \subseteq \mathbb{R}$, das keine perfekte (=abgeschlossene, in sich dichte) Teilmenge enthält und $|T| = 2^\omega$. Solch ein T erhält man mit Lemma 3.32. Dann setzen wir

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & \text{wenn } x \in S; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und g ist stetig und $g \circ f$ Borel. Dann ist $T = \mathrm{im}(g \circ f)$ das Bild des polnischen Raumes $[A]^\omega$ (mit der metrischen Topologie) unter einer Borel-Funktion. Nach Satz 3.41 ist T als Borelbild von $[A]^\omega$ auch darstellbar als stetiges Bild von ω^ω. Daher hat T nach Satz 3.42 eine perfekte Teilmenge. Widerspruch. $\square$

Definition 3.44 (Simpsons äquivalente Definition von bqo, 1985, [14])**.** Es Q eine Klasse, und es sei $(Q, \leq)$ eine Quasiordnung. Q trage die diskrete Topologie. Es sei $A \in [\omega]^\omega$. Eine Borel-messbare Funktion $f \colon [A]^\omega \to Q$ heißt *Q-Array*. Ein Q-Array $f = \langle (X, q_X) \,|\, X \in [A]^\omega \rangle$ heißt *gut/schlecht*, wenn es ein/kein $X \in [A]^\omega$ gibt, so dass $f(X) \leq f(X \setminus \{\min(X)\})$. Die Quasiordnung $(Q, \leq)$ ist eine *better quasi order, bqo*, wenn es keinen schlechten Q-Array gibt. Da die Bilder von Funktionen immer Mengen sind, funktioniert die Definition auch mit klassengoßen Q.

Nach dem Satz von Mathias 3.26 erhält man eine q̈uivalente Definition, wenn man nur stetige Arrays betrachtet. Nun geben wir noch Nash-Williams' Originaldefinition [17] aus dem Jahr 1968, die wir jedoch nicht weiter verwenden werden.

Definition 3.45 (Nash-Williams' Definition von bqo)**.** Eine Teilmenge $B \subseteq [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ heißt *Block*, falls es für jedes $A \in [\omega]^\omega$ ein Anfangssegment $s \sqsubseteq A$ mit $s \in B$ gibt. $s \sqsubseteq A$ heißt $A \cap (\max(s) + 1) = s$. Die Elemente eines Blocks werden in der folgenden Festsetzung als aufsteigende endliche Folgen geschrieben, d.h. jede endliche Teilmenge von ω wird mit ihrer aufsteigenden Aufzählung identifiziert. Die Quasiordnung $(Q, \leq)$ ist ein bqo, falls für jeden Block B und jede Funktion $f \colon B \to Q$ gilt: Es gibt

$$0 < n < r, s = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in B,\, t = \langle a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \dots, a_r \rangle \in B,$$

so dass $f(s) \leq f(t)$.

Bemerkung 3.46. Da Q die diskrete Topologie trägt und $[\omega]^\omega$ die metrische Topologie, kann man mit dem Satz, dass “Q im Simpson-Sinn bqo” impliziert

“Q^ω im Simpson-Sinn bqo” zeigen, dass aus Simpson-bqo die Originaldefinition folgt. Für die Umkehrrichtung nimmt man den Satz von Mathias und geht von einem Borel-Array zu einem stetigen Unterarray über. Da Q diskret ist, kann man nun mit offenen disjunkten Urbildern arbeiten. Die Funktion, die konstant auf den Urbildern ist und den Wert des stetigen Arrays liefert, erfüllt die Originaldefinition. Also ist der stetige Array gut.

Die Simpson’sche Definition von bqo hat den Vorteil, dass der Limesschritt im Beweis des Satzes 3.49 über einen minimalen schlechten Array mit Borelfunktionen recht einfach geht.

Proposition 3.47. *Wenn Q ein bqo ist, so ist Q ein wqo.*

Beweis. Es Q kein wqo und sei $\langle a_n \mid n < \omega\rangle$ eine schlechte Folge. Wir setzen $f\colon [\omega]^\omega \to Q$, $f(X) = a_{\min(X)}$. Dann ist f ein schlechter Array. □

3.3 Die Menge der abzählbaren linearen Ordnungen mit Einbettung ist bqo

Nun beweisen wir Lavers Satz.

Definition 3.48 (Laver)**.** Es sei $(Q, \leq)$ eine qo. Eine Relation $<'$ auf Q heißt *partieller Rang*, wenn $(Q, \leq')$ eine fundierte Halbordnung ist. Eine Halbordnung $\leq'$ heißt fundiert, wenn jede nicht leere Teilmenge ein $\leq'$-minimales Element hat.

Nun ein $(Q, \leq)$ kein wqo, $\leq'$ ein partieller Rang, und es seien $f\colon [A]^\omega \to Q$, $g\colon [B]^\omega \to Q$ schlechte arrays. Wir schreiben $f \preceq^* g$, wenn $A \subseteq B$ und für alle $X \in [A]^\omega$, $f(X) \leq' g(X)$. Wir schreiben $f \prec^* g$, wenn $A \subseteq B$ und für alle $X \in [A]^\omega$, $f(X) <' g(X)$. (Vorsicht, dies ist mehr als $\preceq^*$ und $\neq$!) Wir sagen f *ist ein minimaler schlechter Q-Array*, wenn f schlecht ist und es keinen schlechten Q-Array $g \prec^* f$ gibt.

Satz 3.49 (Nash-Williams 1965 [18], explizit bei Laver [12])**.** *Es sei $(Q, \leq)$ eine (abzählbare) qo mit einem partiellen Rang $<'$, und es sei $f_0\colon [A_0]^\omega \to Q$ ein schlechter Q-Array. Dann gibt es einen minimalen schechten Q-arrary $f \preceq^* f_0$.*

Beweis. Annahme nicht. Nun betten wir $\aleph_1$ in $([\omega]^\omega, \supset)$ ein und erhalten einen Widerspruch. Jede abzählbare Ordinalzahl lässt sich ordnungstreu in $([\omega]^\omega, \supset)$ einbetten, aber keine überabzählbare. Für $\xi \in \aleph_1$ werden wir $f_\xi\colon [A_\xi]^\omega \to Q$ wählen, so dass für $\xi < \eta < \aleph_1$, $A_\eta \subsetneq A_\xi$ und $f_\eta \preceq^* f_\xi$. Dann haben wir unsere unmögliche Einbettung. Für $\xi \in \aleph_1$ werden wir $f_\xi\colon [A_\xi]^\omega \to Q$ wählen, so dass f_ξ schlecht ist und keinen minimalen schlechten array $\preceq^*$-unter sich hat und so dass $f_\xi \preceq^* f_\eta$ für $\eta < \xi$.

Der Induktionsanfang $\xi = 0$ wird durch f_0 gegeben.

Der Nachfolgerschritt: Nun nehmen wir an, dass f_η für $\eta \leq \xi$ schon gewählt sei, $\xi \in \aleph_1$. Wir sollen $f_{\xi+1}$ wählen. Da f_ξ nicht minimal ist, gibt es einen $\prec^*$ kleineres $g_\xi \prec^* f_\xi$. Wir können mit Theorem 3.26 B_ξ so klein wählen, dass g_ξ

auf $[B_\xi]^\omega$ stetig ist.[11] Außerdem wählen wir B_ξ so klein, dass $A_\xi \setminus B_\xi$ unendlich ist. Da g_ξ stetig ist, gibt es ein $s_\xi \sqsubseteq B_\xi$, so dass $g_\xi \restriction [s_\xi, B_\xi]$ konstant ist. Wir setzen nun

$$A_{\xi+1} = B_\xi \cup \{n \in A_\xi \mid n \leq \max(s_\xi)\}$$

und

$$f_{\xi+1} = \begin{cases} g_\xi(X), & \text{wenn } X \in [B_\xi]^\omega; \\ f_\xi(X), & \text{wenn } X \in [A_{\xi+1}]^\omega \setminus [B_\xi]^\omega. \end{cases}$$

Dann ist $f_{\xi+1}$ Borel-messbar und schlecht, da f_ξ und g_ξ schlecht sind und $g_\xi \preceq^* f_\xi$. Dann ist $A_{\xi+1} \subsetneq A_\xi$ und $f_{\xi+1} \preceq^* f_\xi$. Dies beendet den Nachfolgerschritt.

Der Limesschritt: Nun sei f_ξ für $\xi < \delta$ gewählt und δ eine abählbare Limesordinalzahl. Wir setzen $A_\delta = \bigcap\{A_\xi \mid \xi < \delta\}$.

Zwischenbehauptung: A_δ ist unendlich.
Annahme nicht. Wenn $A_\delta \subseteq \{0, \dots, m-1\}$ ist für ein $m \in \mathbb{N}$, dann gibt es für jedes ξ ein $n_\xi = \min A_\xi \setminus \{0, \dots, m-1\}$ und die n_ξ sind unbegrenzt in ω, denn es gibt in δ unendlich viele ξ mit $n_\xi \in A_\xi \setminus A_{\xi+1}$. Für so ein ξ ist $n_\xi > \max(s_\xi)$. Da $n_\xi = \min(A_\xi \setminus m)$ und $s_\xi \sqsubseteq B_\xi \subseteq A_\xi$, ist $s_\xi \cap \{m, \dots, n_\xi\} = \emptyset$ und somit $s_\xi \subseteq m$.

Wir betrachten nun nur noch diese $\xi < \delta$, nennen wir sie $\xi \in C$, C konfinal in δ. Dann gibt es nur 2^m viele Möglichkeiten für s_ξ, $\xi \in C$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es unendlich viele $\xi \in C$ mit selbem s_ξ. Wir halten so eine Menge fest. Wir nennen sie D.

Nun ist $s_\xi = s_\eta$ für $\xi < \eta \in D$. Es ist immer $s_\xi \sqsubseteq B_\xi$. Dann ist $B_\eta \in [s_\xi, B_\xi]$ und daher

$$f_\eta(B_\eta) \leq' f_{\xi+1}(B_\eta) = g_\xi(B_\eta) = g_\xi(B_\xi) <' f_\xi(B_\xi)$$

für alle η mit $s_\eta = s_\xi$. Die Kette $\langle f_\eta(B_\eta) \mid \eta \in D\rangle$ ist also nun $<'$-absteigend und unendlich. Dies ist eine Widerspruch zur Fundiertheit von $<'$. Also ist A_δ unendlich.

Wir definieren nun $f_\delta \colon [A_\delta]^\omega \to Q$ durch $f_\delta(X) = \leq'\text{-}\min_{\xi<\delta} f_\xi(X) = \lim_{\xi<\delta} f_\xi(X)$. f_δ ist punktweiser Limes von Borel-messbaren Funktionen in ein separables Bild und daher wieder Borel-messbar. (Ohne Satz 3.26 in voller Stärke funktioniert unser Beweis immerhin für abzählbare Q.) Dann ist $f_\delta \preceq^* f_\xi$ für $\xi < \delta$ und f_δ ist schlecht und hat keinen minimalen schlechten array $\preceq^*$-unter sich. Dies beendet den Limesschritt. Die unmögliche $\aleph_1$-lange Folge $\langle f_\xi \mid \xi \in \aleph_1\rangle$ zeigt nun, dass die Annahme falsch war. □

Definition 3.50. Es sei $(Q, \leq)$ ein qo. Es sei nun α eine Ordinalzahl. Eine Q-Folge ist eine Funktion $f \colon \alpha \to Q$. $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ heißt auch die Länge von f. Es sei $\tilde{Q} = \{f \mid \exists \alpha \in \mathrm{On}, f \colon \alpha \to Q\}$. Dies ist also nun eine echte Klasse. Wir definieren eine Quasiordnung $\leq$ auf $\tilde{Q}$ durch $f \leq g$, wenn es eine ordnungstreue Funktion $h \colon \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{dom}(g)$ gibt, so dass für $\xi \in \mathrm{dom}(f)$, $f(\xi) \leq_Q g(h(\xi))$.

Wir zeigen: Wenn $(Q, \leq)$ bqo, so auch $(\tilde{Q}, \leq)$.

Lemma 3.51. *Wenn $s, t \in \tilde{Q}$ und $s \not\leq t$, so gibt es ein $\delta \in \mathrm{dom}(s)$, so dass $s \restriction \delta \leq t$ und $s \restriction (\delta + 1) \not\leq t$.*

[11] Hier geht also die Abzählbarkeit von Q ein. Wenn wir diese nicht voraussetzen, dann sollten wir Lemma 3.43 beweisen.

Beweis. Wir arbeiten mit einem minimalen h, das $s \leq t$ zu bezeugen versucht. Dann gibt es eine kleinstes Argument $\delta < \mathrm{dom}(s)$, bei dem die Suche von $h(\delta)$ scheitert. Es ist $s \upharpoonright \delta \leq t \upharpoonright \sup\{h(\xi) \mid \xi < \delta\}$ aber $s \upharpoonright (\delta + 1) \not\leq t$. □

Satz 3.52 (Nash-Williams 1968, [17])**.** *Es sei $\langle s_X \mid X \in [A]^\omega \rangle$ ein schlechter $\tilde{Q}$-array. Dann gibt es ein $B \in [A]^\omega$ und einen schlechten Q-Array $\langle f(X) \mid X \in [B]^\omega \rangle$ und für jedes $X \in [B]^\omega$, ein Element $s_X(\alpha)$ für ein $\alpha \in \mathrm{dom}(s_X) \in \mathrm{On}$, so dass $f(X) = s_X(\alpha)$.*

Beweis. Die Anfangssegmentrelation sei $s \leq' t$, also $s \leq' t$:gdw $s = t \upharpoonright \mathrm{dom}(s)$. Dieses $\leq'$ ist ein partieller Rang auf $\tilde{Q}$. Nach Satz 3.49 nehmen wir ein $\langle s'_X \mid X \in [B]^\omega \rangle \preceq^* \langle s_X \mid X \in [A]^\omega \rangle$, das $\prec^*$-minimal schlecht in $\tilde{Q}$ ist. Wenn wir den Satz nun mit s' zeigen können, dann haben wir den Satz auch mit s gezeigt: Denn, angenommen wir haben $\langle s_X \mid X \in [B]^\omega \rangle$ gegeben und verkürzen einige s_X zu $s'_X = s_X \upharpoonright \delta_X$ und starten dann den Satz mit s' statt mit s, und erhalten $f(X) = s'_X(\alpha) = s_X(\alpha)$ für $s'_X = s_X \upharpoonright \theta_X$. Jeder $\preceq^*$-Vorgänger von s ist aber gerade eine Verkürzung von s nach der Definition von $<'$. Wir schreiben von nun an statt s' s und statt B wieder A. Da s schlecht ist, haben wir für jedes $X \in [A]^\omega$ und $Y = X \setminus \{\min(X)\}$ die Relation $s_X \not\leq s_Y$. Nach Lemma 3.51 gibt es $\theta_X < \mathrm{dom}(s_X)$, so dass $s_X \upharpoonright \theta_X \leq s_Y$ und $s_X \upharpoonright (\theta_X + 1) \not\leq s_Y$. Nun ist

$$\langle s_X \upharpoonright \theta_X \mid X \in [A]^\omega \rangle \prec^* \langle s_X \mid X \in [A]^\omega \rangle.$$

Da $\langle s_X \mid X \in [A]^\omega \rangle$ $\prec^*$-minimal schlecht war, gibt es keinen schlechten $\tilde{Q}$-array $\prec^*$-unterhalb der rechten Seite der Ungleichung. Der Array auf der linken Seite ist also gut. Wir färben nun die die Argumente in diesem guten Array. Wir leiten aus s die Färbung

$$c(X) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } s_X \upharpoonright \theta_X \leq s_Y \upharpoonright \theta_Y; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ab. Die Funktion $X \mapsto s_X \upharpoonright \theta_X$ ist eine Borelfunktion, da sie ein Array ist. Die Färbung ist eine Borel-Funktion, da

$$c^{-1}[\{0\}] = \pi_1[\{(X, Y) \in [A]^\omega \mid s_X \upharpoonright \theta_X \leq s_Y \upharpoonright \theta_Y, Y = X \setminus \{\min(X)\}\}$$

mit der Projektion π_1 auf die erste Koordinate. Die Menge $O = \{(s, t) \in \tilde{Q} \mid s \leq t\}$ ist offen in $\tilde{Q} \times \tilde{Q}$, da $\tilde{Q}$ die diskrete Topologie trägt. Die Menge $\{(X, Y) \in [B]^\omega \mid s_X \upharpoonright \theta_X \leq s_Y \upharpoonright \theta_Y, Y = X \setminus \{\min(X)\}\}$ ist als (s, s)-Urbild der offenen Menge O eine Borelmenge in $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$. Die Projektion π_1 ist injektiv. Daher ist $c^{-1}[\{0\}]$ Borel. Nach dem Galvin-Prikry-Satz 3.25 für die Borelfärbungen gibt es $B \in [A]^\omega$, so dass $s_X \upharpoonright \theta_X \leq s_Y \upharpoonright \theta_Y$ für jedes $X \in [B]^\omega$ und $Y = X \setminus \{\min(X)\}$. Hier nutzen wir, dass die linke Seite gut ist, und also bei der Anwendung des Galvin-Prikry-Satze 3.25 nur die homogene Farbe 0 möglich ist. Dann ist $s_X \upharpoonright X \leq_{\tilde{Q}} s_Y \upharpoonright \theta_Y$, jedoch $s_X \upharpoonright (\theta_X + 1) \not\leq_{\tilde{Q}} s_Y$. Daher ist $s_X \upharpoonright (\theta_X + 1) \not\leq_{\tilde{Q}} s_Y \upharpoonright (\theta_Y + 1)$ und somit $s_X(\theta_X) \not\leq_X s_Y(\theta_Y)$. Der Q-Array $\langle s_X(\theta_X) \mid X \in [B]^\omega \rangle$ ist schlecht. Für $X \in [B]^\omega$ ist $\alpha = \theta_X$ wie im Satz beschrieben. □

Korollar 3.53. *Wenn Q ein bqo ist, so auch $\tilde{Q}$.*

Bemerkung 3.54. Die Pouzet-Charakterisierung lautet „Q bqo gdw $\tilde{Q}$ wqo". Dies wird oft als Definition für bqo genommen.

Definition 3.55. Eine lineare Ordnung L heißt *zerstreut (scattered)*, wenn die rationalen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung nicht in L eingebettet werden können.

Lemma 3.56 (Cantor)**.** *Jede abzählbare lineare Ordnung ist in jede abzählbare nicht zerstreute lineare Ordnung einbettbar.*

Beweis. Es sei $L = \{\ell_n \mid n < m \leq \omega\}$ eine höchstens abzählbare lineare Ordnung. Es genügt, L in $\mathbb{Q}$ einzubetten. Induktiv über n wählen wir $f(\ell_n) \in \mathbb{Q}$, so dass $\{\ell_i \mid i \leq n\}$ in L_1 wie $\{f(\ell_i) \mid i \leq n\}$ in $\mathbb{Q}$ angeordnet ist. $f(\ell_0) \in \mathbb{Q}$ ist beliebig. Falls $i < n$ und ℓ_i in $L \cap \{\ell_k \mid k < n\}$ maximal $< \ell_n$ ist und $j < n$ und ℓ_j in $L \cap \{\ell_k \mid k < n\}$ minimal $> \ell_n$ ist, so wählen wir $f(\ell_n) \in (f(\ell_i), f(\ell_j))_{\mathbb{Q}}$. Falls ℓ_n am Rand liegt, verfahren wir bei der Wahl von f ähnlich. Am Schluss ist $f = \{(\ell_n, f(\ell_n)) \mid n < m\}$ eine Einbettung. $\square$

Bei den abzählbaren linearen Ordnungen sind also nur die zersteuten Ordnungen gefragt für die Fraïssé-Frage. Korollar 3.58 folgt also aus Satz 3.57

Satz 3.57 (Laver 1971)**.** *Die Klasse der zerstreuten linearen Ordnungen mit der Einbettungsrelation ist bqo.*

Korollar 3.58 (Die Fraïssé-Vermutung ist wahr)**.** *Die Menge M der abzählbaren linearen Ordnungen mit der Einbettungsrelation ist bqo.*

Beweis. Es sei $\langle L_X \mid X \in [A]^\omega \rangle$ ein M-Array. Falls $L_{X \setminus \{\min(X)\}}$ zerstreut ist für alle $X \in [A]^\omega$, so ist $\langle L_X \mid X \in [A]^\omega \rangle$ gut (genau dann), wenn $\langle L_X \mid X \in [A]^\omega, L_X$ zerstreut$\rangle$ gut ist. Dieser Array besteht nur noch aus zerstreuten Ordnungen und ist gut nach Satz 3.57. (Der Zusatz "genau dann" wird nicht gebraucht.) Falls $L_{X \setminus \{\min(X)\}}$ nicht zerstreut ist für ein $X \in [A]^\omega$, so ist der Array gut. $\square$

Wir beweisen jetzt Lavers Satz in der obigen Fassung 3.57 und damit die Fraïssé-Vermutung (und viel mehr).

Anschauliche Definition von On, der Klasse der Ordinalzahlen.

Definition 3.59. $0 = \emptyset$ ist eine Ordinalzahl. Wenn α eine Ordinalzahl ist, so auch $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, wenn für $\alpha \in \delta$ die Menge α jeweils eine Ordinalzahl ist, so ist auch $\delta = \{\alpha \mid \alpha < \delta\}$ eine Ordinalzahl. On ist die Klasse aller Ordinalzahlen.

Für je zwei Ordinalzahlen α, β ist $\alpha < \beta$ definiert durch $\alpha \in \beta$. Dies ist eine lineare Ordnung auf On.

Definition 3.60 (Hausdorff [7])**.** Die *Hausdorff-Hierarchie der zerstreuten linearen Ordnungen* wird induktiv über $(\mathrm{On}, <)$ aufgebaut: S_0 ist die Klasse aller Einpunkt-Ordnungen. Nun sei $\varrho \in \mathrm{On}$ und S_ξ schon bekannt für $\xi < \varrho$. Wir setzen $S_{<\varrho} = \bigcup\{S_\xi \mid \xi < \varrho\}$. Dann sind die Elemente von S_ϱ genau die linearen Ordnungen des Typs

$$L = L_0 + L_1 \cdots + L_\xi + \ldots, \qquad \xi < \alpha_L$$

für irgendeine Ordinalzahl α und Elemente $L_\xi \in S_{<\varrho}$, $\xi < \alpha_L$, und

$$L = \cdots + L_\xi + \cdots + L_1 \cdots + L_0, \qquad \xi < \alpha_L$$

für irgendeine Ordinalzahl α und Elemente $L_\xi \in S_{<\varrho}$, $\xi < \alpha_L$. Die zweite Summe ist also gerade längs der inversen Wohlordnunge $(\alpha, \ni)$ gebildet. Die Elemente von $L \in S_\varrho \setminus S_{<\varrho}$ heißen die versteuten Ordnungen vom zerstreutheitsrang ϱ, man schreibt auch $\mathrm{rk}(L) = \varrho$.

Nun ist $S = \bigcup\{S_\varrho \mid \varrho \in \mathrm{On}\}$ die Hausdorffsche Klasse der zerstreuten linearen Ordnungen.

Wir zeigen nun, dass die Hausdorff'sche Klasse S genau die zerstreuten linearen Ordnungen gibt.

Satz 3.61 (Hausdorff [7]). *Die Hausdorffsche Klasse S ist die Klasse der zerstreuten linearen Ordnungen. Wenn man α nur über die abzählbaren Ordninalzahlen laufen lässt, dann erhält man gerade die abzählbaren zerstreuten linearen Ordnungen.*[12]

Beweis. Induktiv über den zerstreutheitssrang zeigt man, dass jedes Element von S zerstreut ist. Umgekehrte Inklusion: Es sei L zerstreut. Wir definieren für $x, y \in L$, $x \approx y$, wenn $x = y$ oder wenn das L-Intervall $[x, y] \in S$ ist oder wenn das L-Intervall $[y, x] \in S$ ist. Die Relation $\approx$ ist eine Kongruenzrelation bezüglich der Ordnung von L. Die Relation hat nur eine einzige $\approx$-Äquivalenzklasse. Denn sonst hätte man dicht viele $\approx$-Klassen und könnte die rationalen Zahlen mit ihrer Ordnung in $(L, <_L)$ einbetten und somit wäre L nicht zerstreut. Nun kann man L darstellen als an beiden Enden konfinale Summe. Wir nehmen hierzu $\langle x_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(L)\rangle$ aufsteigend und unbeschränkt in L und $\langle y_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(L^*)\rangle$ absteigend und nach unten unbeschränkt in L. Dann ist

$$L = \cdots + [y_2, y_1) + [y_1, y_0) + [y_0, x_0] + (x_0, x_1] + (x_1, x_2] + \ldots, \tag{3.1}$$

Jedes Intervall $[y_{\alpha+1}, y_\alpha)$ und $[y_0, x_0]$ und $(x_\alpha, x_{\alpha+1}]$ ist in einem S_ϱ, denn je zwei Elemente sind $\approx$-äquivalent. Es sind nur Mengen-wenige Intervalle, also ist auch die Summe (3.1) in einer Hausdorff-Stufe S_ξ, wenn man für ξ das Supremum all der vorkommenden ϱ nimmt und dann 2 hinzufügt, einmal für den Limes nach unten und einmal für den Limes nach oben. □

Ende des Beweises von Satz 3.57: Auch für abzählbare lineare Ordnungen braucht man nun Lemma 3.43, denn Q, die Menge der abzählbaren linearen Ordnungen ist überabzählbar. Die Klasse S der zerstreuten linearen Ordnungen trage die diskrete Topologie, ist also ein metrischer "Raum". Wir definieren einen partiellen Rang auf S durch $M <' L$, wenn $M \leq L$ und für das minimale ϱ, so dass $L \in S_\varrho$ gilt: $M \in S_{<\varrho}$. Wir schreiben $M \leq' L$, wenn $M <' L$ oder $M = L$. Annahme, S mit der Einbettungsrelation ist kein bqo. Es sei $\langle L'_X \mid X \in [A']^\omega\rangle$ ein schlechter Q-Array. Nach Lemma 3.43 ist $\{L'_X \mid X \in [A']^\omega\}$ separabel. Dann gibt es nach dem Satz von Nash-Williams und Laver 3.49 einen $\prec^*$-minimalen schlechten S-Array $f = \langle L_X \mid X \in [A]^\omega\rangle \preceq^* \langle L'_X \mid X \in [A']^\omega\rangle$.

[12] Der Zusatz hilft wenig, denn Lemma 3.43 wird auch für die abzählbare Variante gebraucht.

Jedes L_X ist entweder die Einpunkt-Ordnung oder eine wohlgeordnete Summe von kleiner-rangigen Ordnungen oder die umgekehrt wohlgeordnete Summe von kleiner-rangigen Ordnungen. Wir benutzen dies wieder als Färbung. (Wenn f Borel ist, so ist auch $c \circ f$ Borel.) Nach dem Satz von Galvin und Prikry 3.25 gibt es ein $B \in [A]^\omega$, so dass alls L_X für $X \in [B]^\omega$ vom selben Typ sind. Fall 1 ist ausgeschlossen, denn der Array ist schlecht. Wir nehmen Typ 2 an.

$$L_X = L_X^0 + L_X^1 \cdots + L_X^\xi + \dots, \qquad \xi < \alpha_X$$

für irgendeine Ordinalzahl α_X und Elemente $L_X^\xi <' L_X$ für jedes $\xi < \alpha_X$. Nun haben wir also $s_X = \langle L_X^\xi \,|\, \xi < \alpha_X \rangle \in \tilde{S}$ uns $\langle s_X \,|\, X \in [B]^\omega \rangle$ ist ein $\tilde{S}$-Array.

Da f schlecht ist, ist auch $\langle s_X \,|\, X \in [B]^\omega \rangle$ ist ein schlechter $\tilde{S}$-Array. Wiederum nutzen wir, dass dessen Bildmenge separabel ist nach Lemma 3.43. Nach Satz 3.52 gibt es ein $C \in [B]^\omega$ und einen schlechten S-Array $g\colon [C]^\omega \to S$, so dass $g(X)$ ein $s_X(\beta_X) = L_X^{\beta_X}$ ist für ein $\beta_X \in \alpha_X$. Dann ist $\langle L_X^{\beta_X} \mid X \in [C]^\omega \rangle$ ein schlechter S-Array und

$$\langle L_X^{\beta_X} \mid X \in [C]^\omega \rangle \prec^* \langle L_X \,|\, X \in [A]^\omega \rangle.$$

Dies widerspricht der $\prec^*$-Minimalität von $\langle L_X \,|\, X \in [A]^\omega \rangle$.

Literaturverzeichnis

[1] Claude Berge. *Graphes.* μ_B. Dunod, Paris, third edition, 1983.

[2] Norman Biggs. *Algebraic graph theory.* Cambridge Tracts in Mathematics, No. 67. Cambridge University Press, London, 1974.

[3] Reinhard Diestel. *Graph theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, Heidelberg, fourth edition, 2010.

[4] Ryszard Engelking. *Dimension theory*, volume 19 of *North-Holland Mathematical Library.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford-New York; PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1978. Translated from the Polish and revised by the author.

[5] Fred Galvin and Karel Prikry. Borel sets and Ramsey's theorem. *J. Symbolic Logic*, 38:193–198, 1973.

[6] Jonathan L. Gross and Jay Yellen. *Graph theory and its applications.* Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second edition, 2006.

[7] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Chelsea Publishing Co., New York, 1949.

[8] Graham Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 2:326–336, 1952.

[9] Thomas Jech. *Set Theory. The Third Millenium Edition, revised and expanded.* Springer, 2003.

[10] Alexander Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Number 156 in Graduate text in Mathematics. Springer-Verlag, Heidelberg New York, 1995.

[11] Joseph Kruskal. Well-quasi-ordering, the tree theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, pages 210–225, 1960.

[12] Richard Laver. On Fraïssé's Order Type Conjecture. *Ann. Math. (2)*, 93:89–111, 1971.

[13] W. Mader. Existenz n-fach zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend grosser Kantendichte. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 37:86–97, 1972.

[14] Richard Mansfield and Galen Weitkamp. *Recursive aspects of descriptive set theory*, volume 11 of *Oxford Logic Guides.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985. With a chapter by Stephen Simpson.

[15] Adrian Mathias. Happy families. *Ann, Math. Logic*, 12:59–111, 1977.

[16] Yannis Moschovakis. *Descriptive Set Theory.* North-Holland, 1980.

[17] C. St. J. A. Nash-Williams. On better-quasi-ordering transfinite sequences. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 64:273–290, 1968.

[18] Crispin Saint-John A. Nash-Williams. On well-quasi-ordering infinite trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 61:697–720, 1965.

[19] R. Rado. Partial well-ordering of sets of vectors. *Mathematika*, 1:89–95, 1954.

[20] S. M. Srivastava. *A course on Borel sets*, volume 180 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1998.

Index