BLATT 01

(18.10.2023)

Besprechung der Aufgaben am Freitag, dem 27.10.2023, von 14:15 Uhr an in der Übungsstunde im HS II

Definition. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Nach der Konvention sind verbundene (zusammenhängende) Graphen niemals leer.

1. Der Minimalumfang (englisch: *girth*, was wörtlich übersetzt *Umfang* heißt) von G ist definiert als die minimale Länge eines Zykels in G und ∞, falls es keine Zykel gibt.
2. Der Maximalumfang (englisch: *circumference*, was wörtlich übersetzt *Umfang* heißt) von G ist definiert als die maximale Länge eines Zykels in G. Wenn es keinen Zykel gibt, lässt man die circumference am besten undefiniert.
3. Der Durchmesser eines verbundenen Graphen (englisch *diameter*) ist definiert als die größte Distanz $d_G(x, y)$ zwischen zwei Knoten $x, y \in V$. Die Distanz $d_G(x, y)$ ist die Länge des kürzesten Pfades von x nach y.
4. Die Verbundenheit (englisch: *connectivity*) eines verbundenen Graphen G, geschrieben $\kappa(G)$, ist die größte natürliche Zahl k, sodass $|G| > k$ und für alle $X \subseteq V$ mit $|X| < k$ gilt, dass $G - X$ verbunden ist.
5. Die Kantenverbundenheit (englisch: *edge-connectivity*) eines verbundenen Graphen G, geschrieben $\lambda(G)$, ist die größte natürliche Zahl l, sodass für alle $X \subseteq E$ mit $|X| < l$ gilt, dass $(V, E \setminus X)$ verbunden ist.
6. G ist ein Baum, wenn G verbunden ist, aber keine Zykel enthält.

Aufgabe 1. Es sei $d \in \mathbb{N}$ (wir zählen die 0 zu den natürlichen Zahlen) und $V_d := \{0, 1\}^d$, also die Menge aller 0-1-Folgen mit Länge d. Auf V_d definieren wir einen Graphen, indem genau dann eine Kante zwischen zwei Folgen besteht, wenn sie sich in exakt einem Eintrag unterscheiden. Wir nennen V_d den d-dimensionalen Würfel. Bestimmen Sie folgende Eigenschaften von V_d: Die Anzahl der Knoten, den durchschnittlichen Grad eines Knotens, den Durchmesser, sowie den Minimal-und Maximalumfang.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie $\kappa(G)$ und $\lambda(G)$ für alle $G \in \{P^n, C^n, K^n \mid n \geq 3\}$. Hier ist P^n der Pfad der Länge n, C^n der Zykel der Länge n, K^n der vollständige Graph auf $\{0, \ldots, n-1\}$ und K_n^m der m-partite Graph, in dem jeder Part n Knoten hat und es maximal viele Kanten zwischen den Teilen gibt.

Freiwillige Überlegung: Wie sieht es mit $G \in \{K_n^m \mid m, n \geq 3\}$ und $G \in \{V_d \mid d \geq 3\}$ aus?

Aufgabe 3. Es sei T ein Baum und $\mathcal{T}$ eine Menge von Subbäumen des Baumes T (also Subgraphen von T, die Bäume sind).

1. Ist jeder Subbaum von T auch ein induzierter Subgraph von T?
2. Zeigen Sie: Wenn für je zwei Elemente von $\mathcal{T}$ der Schnitt nicht leer ist, so ist auch der Gesamtschnitt $\bigcap \mathcal{T} = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} T$ nicht leer.[1]
3. Zeigen Sie, dass es für jede Zahl $k \geq 2$ gilt: Es gibt $X = \{T_0, \ldots, T_{k-1}\} \subseteq \mathcal{T}$ mit Mächtigkeit k, sodass für $i \neq j$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, oder es gibt $x \subseteq T$ mit Mächtigkeit höchstens $k-1$, sodass für alle $S \in \mathcal{T}$, $S \cap x \neq \emptyset$.

Aufgabe 4. Es sei G ein Graph, in dem keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Distanz zu einem dritten Knoten haben. Ist G dann bipartit?

[1] Die Schreibweise $\bigcap \mathcal{T}$ ist die in der Mengenlehre gebräuchliche.