Take-Home Exam

Korrigierte Version vom 21.12.2023

Abgabe am 31.1.2024 vor der Vorlesung oder in Frau Mildenbergers Postfach im Logikflur

Definition. Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Wir definieren folgende natürliche Zahlen:

1. Die *Matching Nummer* $\nu(G)$ ist die maximale Größe eines Matchings in G.
2. Die *Kantenüberdeckungszahl* $\rho(G)$ ist die minimale Mächtigkeit einer Menge $A \subseteq E$, sodass
$$V \subseteq \bigcup\{e \,:\, e \in A\}.$$
3. Nun kann G auch abzählbar unendlich sein. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl k derart, dass eine Abbildung $c\colon G \to \{0, \dots, k-1\}$ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $e = \{v_1, v_2\} \in E$ die Bedingung $c(v_1) \neq c(v_2)$ gilt. Wir definieren $\chi(G) = \infty$, wenn kein solches k existiert.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei G ein Graph sowie $\mathcal{G}$ eine nicht leere Menge von Subgraphen von G, sodass $G' := \bigcap_{H \in \mathcal{G}} H$ nicht leer ist.

1. Nehmen Sie an, dass G sowie jedes Element von $\mathcal{G}$ verbunden ist. Ist dann G' verbunden?
2. Nehmen Sie an, dass G sowie jedes Element von $\mathcal{G}$ ein Baum ist. Ist dann G' ein Baum?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph ohne isolierte Punkte (also Punkte, die keine Kante berühren). Zeigen Sie, dass dann $\nu(G) + \rho(G) = |V|$ gilt, ohne den Satz von König zu benutzen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien G ein (potentiell unendlicher) Graph sowie k eine natürliche Zahl derart, dass $\chi(H) \leq k$ für alle endlichen Subgraphen H von G gilt. Gilt dann auch $\chi(G) \leq k$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien G_1 und G_2 zwei Graphen. Wir definieren den Graphen $G_1 \times G_2$ wie folgt:

(a) $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$,

(b) $\{(v_1, v_2), (u_1, u_2)\} \in E(G_1 \times G_2) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1,2} \{v_i, u_i\} \in E(G_i)$.

Es seien G_1 und G_2 endliche Graphen sowie $n \in \mathbb{N}$. K_n ist der vollständige Graph mit n Knoten: $K_n = (\{0, \dots, n-1\}, [\{0, \dots, n-1\}]^2)$.

1. Gilt $\chi(G_1 \times G_2) \leq \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$?
2. Gilt $\chi(G_1 \times G_1) = \chi(G_1)$?
3. Gilt $\chi(G_1 \times K_n) = \min(\chi(G_1), n)$?

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ derart, dass $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gibt es dann eine Menge $D \in [A_0]^{\mathbb{N}}$, sodass

$$\forall n \in D,\ D/\{n\} := D \setminus \{0, \ldots, n\} \subseteq A_n$$

Eine Menge D mit der obigen Eigenschaft heißt *Diagonalschnitt* von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Gegeben eine Folge wie in der vorherigen Aufgabe, gibt es zwei disjunkte Diagonalschnitte?

Aufgabe 7 (4 + 4 Punkte)**.** Wir betrachten Ketten in $([\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}, \subseteq)$.

1. Gibt es eine überabzählbare lineare Ordnung $(L, <)$ und eine Folge $(A_l)_{l\in L}$ derart, dass $A_l \in [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ für alle $l \in L$ und aus $l_0 < l_1$ die Relation $A_{l_0} \subsetneq A_{l_1}$ folgt?

2. Gibt es eine überabzählbare Wohlordnung $(L, <)$ mit der obigen Eigenschaft?

Hinweis: Für (1) können Sie die Ordnung $(\mathbb{R}, <)$ betrachten. Benutzen Sie für (2) die Aussage (die Sie beweisen müssen), dass in einer Wohlordnung $(L, <)$ jedes $l_0 \in L$ (außer dem maximalen Element von L, falls es so eines gibt) einen direkten Nachfolger l_0^+ hat (d.h. es gibt kein l_1 mit $l_0 < l_1 < l_0^+$).

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Es seien $(L_1, <_1)$ und $(L_2, <_2)$ abzählbare lineare Ordnungen, sodass für jedes $i = 1, 2$ gilt:

1. $(L_i, <_i)$ ist dicht, d.h. für $l_0 < l_2 \in L_i$ gibt es $l_1 \in L_i$, sodass $l_0 < l_1 < l_2$.

2. $(L_i, <_i)$ hat keine Endpunkte, d.h. für $l_1 \in L_i$ gibt es $l_0, l_2 \in L_i$, sodass $l_0 < l_1 < l_2$.

Gibt es dann einen Isomorphismus (also eine ordnungserhaltende Bijektion) von L_1 nach L_2?

Hinweis: Schreiben Sie $L_i = \{l_n^i \mid n \in \mathbb{N}\}$ und konstruieren Sie induktiv injektive Funktionen f_n, die die Ordnung erhalten, sodass $\mathrm{dom}(f_n) \supseteq \{l_k^1 \mid k \leq n\}$ und $\mathrm{Bild}(f_n) \supseteq \{l_k^2 \mid k \leq n\}$.

Bewertung:
Für den Erwerb der Studienleistung sollten Sie mindestens 16 Punkte erreichen. Sie sollen Ihre Arbeiten einzeln abgeben. Wir werden versuchen, Ihnen dann bis zum Ende der Vorlesungszeit Rückmeldung zu geben.