Take-Home Exam
Version vom 11.1.2024
Abgabe am 31.1.2024 vor der Vorlesung oder in Frau Mildenbergers Postfach im Logikflur

Definition. Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Wir definieren folgende natürliche Zahlen:

1. Die *Matching Nummer* $\nu(G)$ ist die maximale Größe eines Matchings in G. Ein Matching M ist wie in den bipartiten Graphen definiert als eine Kantenmenge $M \subseteq E$, so dass je zwei verschiedene Elemente aus M keinen gemeinsamen Knoten haben.

2. Die *Kantenüberdeckungszahl* $\rho(G)$ ist die minimale Mächtigkeit einer Menge $A \subseteq E$, sodass
$$V \subseteq \bigcup\{e \ : \ e \in A\}.$$

3. Nun kann G auch abzählbar unendlich sein. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl k derart, dass eine Abbildung $c\colon G \to \{0, \dots, k-1\}$ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $e = \{v_1, v_2\} \in E$ die Bedingung $c(v_1) \neq c(v_2)$ gilt. Wir definieren $\chi(G) = \infty$, wenn kein solches k existiert.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei G ein Graph sowie $\mathcal{G}$ eine nicht leere Menge von Subgraphen von G, sodass $G' := \bigcap_{H \in \mathcal{G}} H$ nicht leer ist. Die Schnittmenge wird so interpretiert: $V(G') := \bigcap_{H \in \mathcal{G}} V(H)$, $E(G') := \bigcap_{H \in \mathcal{G}} E(H)$.

1. Nehmen Sie an, dass G sowie jedes Element von $\mathcal{G}$ verbunden ist. Ist dann G' verbunden?

2. Nehmen Sie an, dass G sowie jedes Element von $\mathcal{G}$ ein Baum ist. Ist dann G' ein Baum?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph ohne isolierte Punkte (also Punkte, die keine Kante berühren). Zeigen Sie, dass dann $\nu(G) + \rho(G) = |V|$ gilt, ohne den Satz von König zu benutzen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien G ein (potentiell unendlicher) Graph sowie k eine natürliche Zahl derart, dass $\chi(H) \leq k$ für alle endlichen Subgraphen H von G gilt. Gilt dann auch $\chi(G) \leq k$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien G_1 und G_2 zwei Graphen. Wir definieren den Graphen $G_1 \times G_2$ wie folgt:

(a) $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$,

(b) $\{(v_1, v_2), (u_1, u_2)\} \in E(G_1 \times G_2) \leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1,2} \{v_i, u_i\} \in E(G_i)$.

Es seien G_1 und G_2 endliche Graphen sowie $n \in \mathbb{N}$. K_n ist der vollständige Graph mit n Knoten: $K_n = (\{0, \dots, n-1\}, [\{0, \dots, n-1\}]^2)$.

1. Gilt $\chi(G_1 \times G_2) \leq \min(\chi(G_1), \chi(G_2))$?

2. Gilt $\chi(G_1 \times G_1) = \chi(G_1)$?

3. Gilt $\chi(G_1 \times K_n) = \min(\chi(G_1), n)$?

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ derart, dass $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gibt es dann eine Menge $D \in [A_0]^{\mathbb{N}}$, sodass

$$\forall n \in D,\ D/\{n\} := D \setminus \{0, \dots, n\} \subseteq A_n$$

Eine Menge D mit der obigen Eigenschaft heißt *Diagonalschnitt* von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Gegeben eine Folge wie in der vorherigen Aufgabe, gibt es zwei disjunkte Diagonalschnitte?

Aufgabe 7 (4 + 4 Punkte)**.** Wir betrachten Ketten in $([\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}, \subseteq)$.

1. Gibt es eine überabzählbare lineare Ordnung $(L, <)$ und eine Folge $(A_l)_{l\in L}$ derart, dass $A_l \in [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ für alle $l \in L$ und aus $l_0 < l_1$ die Relation $A_{l_0} \subsetneq A_{l_1}$ folgt?

2. Gibt es eine überabzählbare Wohlordnung $(L, <)$ mit der obigen Eigenschaft?

Hinweis: Für (1) können Sie die Ordnung $(\mathbb{R}, <)$ betrachten. Benutzen Sie für (2) die Aussage (die Sie beweisen müssen), dass in einer Wohlordnung $(L, <)$ jedes $l_0 \in L$ (außer dem maximalen Element von L, falls es so eines gibt) einen direkten Nachfolger l_0^+ hat (d.h. es gibt kein l_1 mit $l_0 < l_1 < l_0^+$).

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Es seien $(L_1, <_1)$ und $(L_2, <_2)$ abzählbare lineare Ordnungen, sodass für jedes $i = 1, 2$ gilt:

1. $(L_i, <_i)$ ist dicht, d.h. für $l_0 < l_2 \in L_i$ gibt es $l_1 \in L_i$, sodass $l_0 < l_1 < l_2$.

2. $(L_i, <_i)$ hat keine Endpunkte, d.h. für $l_1 \in L_i$ gibt es $l_0, l_2 \in L_i$, sodass $l_0 < l_1 < l_2$.

Gibt es dann einen Isomorphismus (also eine ordnungserhaltende Bijektion) von L_1 nach L_2?

Hinweis: Schreiben Sie $L_i = \{l_n^i \mid n \in \mathbb{N}\}$ und konstruieren Sie induktiv injektive Funktionen f_n, die die Ordnung erhalten, sodass $\mathrm{dom}(f_n) \supseteq \{l_k^1 \mid k \le n\}$ und $\mathrm{Bild}(f_n) \supseteq \{l_k^2 \mid k \le n\}$.

Bewertung:
Für den Erwerb der Studienleistung sollten Sie mindestens 16 Punkte erreichen. Sie sollen Ihre Arbeiten einzeln abgeben. Wir werden versuchen, Ihnen dann bis zum Ende der Vorlesungszeit Rückmeldung zu geben.
Dank:
Ich danke für die Hinweise auf Fehler und fehlende Definitionen.