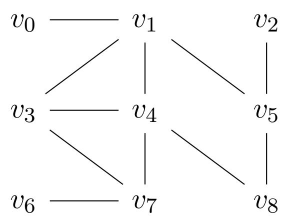
Kombinatorik
Wintersemester 2023/24

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Hannes Jakob

BLATT 02
25.10.2023

Aufgabe 1. Führen Sie den Algorithmus, der im Beweis vom Satz von Trémeaux beschrieben ist, am folgenden Graphen durch (wählen Sie v_0 als Wurzel und wenn Sie einen Knoten wählen sollen, wählen Sie den Knoten mit kleinstem Index):



Die Minorenrelation: $G \preceq H$, wenn G isomorph zum einem Minor von H ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Minorrelation $\preceq$ eine partielle Ordnung auf jeder Menge M endlicher paarweise nicht isomorpher Graphen darstellt. In anderen Worten, zeigen Sie folgende Aussagen für alle Graphen A, B und C in M:

1. $A \preceq A$,
2. Wenn $A \preceq B$ und $B \preceq C$, dann gilt $A \preceq C$,
3. Wenn $A \preceq B$ und $B \preceq A$, dann sind $A = B$.

Freiwilliger Zusatz: (a) Wir stellen die Frage für abzählbar unendliche Graphen. (b) Wie könnte man eine Minorenrelation auf den Isomorphieklassen endlicher Graphen definieren?

Ein Gang (walk) in $G = (V, E)$ ist ein Tupel der Art $(v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-1}, v_n = v_0)$, in dem Wiederholungen bei den Knoten (und auch bei den Kanten) gestattet sind. Es gilt $v_i \in V$, $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Ein Pfad ist ein Gang mit paarweise verschiedenen Knoten, und ein Zykel ist ein geschlossener Pfad, $v_n = v_0$ ist also die einzige Wiederholung.

Aufgabe 3. Wir hätten alternativ definieren können: Ein Gang ist eine alternierende Folge $v_0 e_0 v_1 ... e_{n-1} v_n$ von Ecken und Kanten, sodass für jedes $i < n$ gilt, dass e_i sowohl v_i als auch v_{i+1} berührt. Zeigen Sie, dass mit dieser Definition der Satz über die Eulertouren nicht mehr gilt.

Aufgabe 4. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Jeder zusammenhängende Graph G besitzt einen Gang, der jede Kante genau einmal in jeder Richtung durchläuft, also einen Gang $v_0 e_0 v_1 ... e_{n-1} v_n$, sodass für jede Kante $e = \{v, v'\} \in E(G)$ eindeutige Zahlen i und i' mit $e_i = e, v_i = v, v_{i+1} = v'$ und $e_{i'} = e, v_{i'} = v', v_{i'+1} = v$ existieren.

Besprechung am Freitag, 03.11.2023 um 14:15 im HS II