

BLATT 03
02.11.2023

Aufgabe 1. Es seien eine endliche Menge A sowie Teilmengen A_0, \dots, A_{n-1} von A und positive natürliche Zahlen d_0, \dots, d_{n-1} gegeben. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Es gibt paarweise disjunkte Mengen D_0, \dots, D_{n-1} , sodass für jedes $i < n$ die beiden Relationen $D_i \subseteq A_i$ und $|D_i| = d_i$ erfüllt sind.
2. Für alle $I \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ gilt

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq \sum_{i \in I} d_i.$$

Hinweis: Bauen Sie einen geeigneten bipartiten Graphen.

Aufgabe 2. Es sei G bipartit mit Partition $\{A, B\}$. Es gelte $\delta(G) \geq 1$ und $d(a) \geq d(b)$ für alle $a \in A, b \in B$ mit $ab \in E$. Zeigen Sie, dass G ein matching von A besitzt.

Hinweis: Wenn G ein Graph mit $\delta(G) \geq 1$ ist, so gilt für jedes $S \subseteq G$ die Gleichung

$$|S| = \sum_{x \in S} \sum_{y \in G, xy \in E} \frac{1}{d(x)}.$$