BLATT 04

08.11.2023

Aufgabe 1. Es sei $C = E(V_1, V_2)$ ein Schnitt eines Graphen G. Zeigen Sie: Wenn V_1 und V_2 in G verbunden sind, ist C minimal, also ein Bond.

Aufgabe 2. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, $n = |V|, m = |E|$. Die Inzidenzmatrix $B = (b_{ij})_{i \leq n, j \leq m}$ ist die $\mathbb{F}_2$-Matrix definiert durch

$$b_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } v_i \in e_j; \\ 0, & \text{wenn } v_i \notin e_j. \end{cases}$$

Bezüglich der Standardbasen $\{\{e_j\} : 1 \leq j \leq m\}$ des Kantenraums $\mathcal{E}(G)$ und $\{\{v_i\} : 1 \leq i \leq n\}$ des Knotenraums $\mathcal{V}(G)$ definiert B ein lineare Abbildung $B \colon \mathcal{E}(G) \to \mathcal{V}(G)$ und B^t eine lineare Abbildung $B^t \colon \mathcal{V}(G) \to \mathcal{E}(G)$.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Der Kern von B ist $\mathcal{C}(G)$.
2. Das Bild von B^t ist $\mathcal{B}(G)$.

Aufgabe 3. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Die Zykel und Schnitte eines Graphen G generieren den gesamten Kantenraum.

Hinweis: Betrachten Sie C_4, also den Zykel mit 4 Elementen. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G) \to \mathbb{F}_2$, $\langle \sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j e_j \rangle = \sum \lambda_i \mu_i$ ein Skalarprodukt?

Aufgabe 4. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $F \subseteq E$. Zeigen Sie, dass es genau dann ein Element $F' \in \mathcal{B}(G)$ mit $F' \supseteq F$ gibt, wenn F keinen ungeraden Zykel enthält.

Besprechung am Freitag, 19.11.2023, um 14:00