Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Hannes Jakob

BLATT 05

(15.11.2023)

Aufgabe 1. Erinnerung: Eine Antikette in einer Halbordnung $(P, \leq)$ ist Menge $A \subseteq P$, so dass für je zwei $a, b \in A$ aus $a \neq b$ folgt, dass weder $a \leq b$ noch $b \leq a$.

Zeigen Sie die duale Version vom Satz von Dilworth: Wenn $(P, \leq)$ eine endliche Halbordnung ist, ist die minimale Anzahl von Antiketten, deren Vereinigung P ergibt, gleich der maximalen Mächtigkeit einer Kette in P.

Aufgabe 2. Folgern Sie den Satz von König (In einem bipartiten Graphen ist die maximale Mächtigkeit eines Matchings gleich der minimalen Mächtigkeit eines "vertex cover", d.h. einer Menge von Vertizes, die alle Kanten überdeckt.) aus dem Satz von Dilworth.

Aufgabe 3. Gibt es eine unendliche partielle Ordnung ohne unendliche Antikette (wie in Aufgabe 1), die sich trotzdem nicht als Vereinigung von endlich vielen Ketten schreiben lässt?

Freiwilliger Zusatz für Logik-Interessierte: Wenn man eine Halbordnung $(P, \leq)$ als Forcing benutzt, dann arbeitet man mit einem anderen Begriff von Antikette:

Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq P$ heißt Antikette (für die Verträglichkeitsrelation), wenn je zwei $a \neq b \in A$ unverträglich sind. Wenn man die kleineren Elemente als stärkere Bedingungen interpretiert, dann definiert man: a und b sind unverträglich, wenn es kein $c \in P$ gibt, sodass $a \geq c$ und $b \geq c$.

Wie unterscheidet sich die Antwort auf die Frage, wenn man stattdessen diese Definition verwendet?

Aufgabe 4. Nehmen Sie an, dass es für jedes $\epsilon > 0$ und $m \geq 1$ eine Zahl $n = n(\epsilon, m) > m$ gibt, sodass das Regularitätslemma (für genau dieses Paar (ϵ, m)) für alle Graphen mit Ordnung mindestens $n(\epsilon, m)$ gilt. Das heißt, für jedes $\epsilon > 0$ und $m \geq 1$ gibt es n und M sodass jeder Graph mit Ordnung $\geq n$ eine ϵ-reguläre Partition $\langle V_0, \ldots, V_k \rangle$ besitzt, wobei $m \leq k \leq M$. Folgern Sie das Regularitätslemma.

Besprechung am Freitag, 24.11.2023, um 14:00