BLATT 06
22.11.2023

Aufgabe 1. Für einen Graphen $G = (V, E)$ sei $\overline{G} = (V, \overline{E})$ der Komplementärgraph, definiert durch $\overline{E} := [V]^2 \setminus E$ (in Worten: Zwei Knoten sind genau dann in $\overline{G}$ benachbart, wenn sie in G nicht benachbart sind).

Zeigen Sie: Wenn (A, B) ein ϵ-reguläres Paar in G ist, ist es auch ein ϵ-reguläres Paar in $\overline{G}$.

Aufgabe 2. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $d \in \mathbb{N}$, sodass $d(v) \leq d$ für alle $v \in V$ gilt.

Zeigen Sie: Es gibt eine Funktion $c \colon V \longrightarrow \{0, \ldots, d\}$ derart, dass für alle $e = \{e_0, e_1\} \in E$ gilt, dass $c(e_0) \neq c(e_1)$ (das heißt, wir können den Graphen G so färben, dass zwei benachbarte Knoten stets verschiedenfarbig sind).

Aufgabe 3. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k, l \in \mathbb{N}$, sodass $|V| = \binom{k+l}{k}$.

Zeigen Sie: G enthält entweder einen vollständigen Subgraphen mit $k + 1$ Punkten oder eine unabhängige Teilmenge mit $l + 1$ Punkten.

Aufgabe 4. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Wenn c eine 2-Färbung von $\mathbb{Q}$ ist, also $c \colon \mathbb{Q} \longrightarrow \{0, 1\}$, gibt es $i \in \{0, 1\}$ und $a_0, a_1 \in \mathbb{Q}$, sodass $c^{-1}[\{i\}] \cap (a_0, a_1)$ dicht im Intervall (a_0, a_1) ist.

(ii) Es gibt eine Funktion $c \colon \mathbb{Q}^2 \longrightarrow 2$ (Achtung: Hier betrachten wir keine zweielementigen Mengen, sondern Tupel) derart, dass für alle $A \subseteq \mathbb{Q}$ mit $|A| \geq 2$ die Funktion c auf A^2 nicht konstant ist.

Besprechung am Freitag, 02.12.23, um 14:00