Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Hannes Jakob

BLATT 08
06.12.2023

Aufgabe 1. Es sei $(A, \leq)$ eine Quasiordnung. Für $X \subseteq A$ definieren wir

$$\mathrm{Forb}_{\leq}(X) := \{a \in A \mid \forall x \in X\ a \not\geq x\}.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. $(A, \leq)$ ist eine WQO (also eine Wohlquasiordnung).
2. Für alle $B \subseteq A$ mit der Eigenschaft, dass aus $x \leq y \in B$ auch $x \in B$ folgt, gibt es ein endliches $X \subseteq A$, sodass $B = \mathrm{Forb}_{\leq}(X)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Subgraphenrelation keine WQO auf der Menge der endlichen Bäume T mit $T \subseteq \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 3. Im letzten Schritt des Beweises vom Satz von Kruskal benutzen wir eine „topologische" Einbettung von T_m nach T_n, die die Wurzel von T_m auf die von T_n abbildet. Würden wir zusätzlich annehmen (induktiv), dass die Bäume in A_m auf dieselbe Weise in die von A_n eingebettet sind, scheint es, als würden wir eine stärkere Aussage bewiesen haben, nämlich, dass die endlichen gewurzelten Bäume mit der Subgraphenrelation (sodass Wurzeln auf Wurzeln abgebildet werden) eine WQO sind. Nach der obigen Aufgabe kann das nicht sein. Wo liegt also der Fehler?

Definition. Eine *Wohlordnung, well order* $(A, <)$ ist eine lineare Ordnung derart, dass für jede nichtleere Menge $B \subseteq A$ ein Element $x \in B$ existiert, sodass $x \leq y$ für alle $y \in B$ gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Wenn $(A, <)$ eine Wohlordnung ist, dann ist $(A, \leq)$ eine WQO.
2. Es seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ WQOs, sodass A, B disjunkt sind. Wir definieren die WQO $(A \sqcup B, \leq)$ mit Trägermenge $A \cup B$, sodass für $a_0, a_1 \in A$ $a_0 \leq a_1$ genau dann, wenn $a_0 \leq_A a_1$ und für B genauso. Zwischen Elementen verschiedener Mengen besteht keine Relation. Dann ist $(A \sqcup B, \leq)$ auch eine WQO.
3. Es seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ WQOs. Wir definieren $\leq$ auf $A \times B$ durch $(a_0, b_0) \leq (a_1, b_1)$ genau dann, wenn $a_0 \leq_A a_1$ und $b_0 \leq_B b_1$. Dann ist $(A \times B, \leq)$ auch eine WQO.

Wer möchte, kann auch Summen mit unendlich vielen WQO-Summanden und Produkte mit unendlich vielen WQO-Faktoren untersuchen.

Besprechung am Freitag, 15.12.23, um 14:00