BLATT 09

13.12.23

Definition. Es sei $\leq_R$ auf $Q = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ i < j\}$ definiert durch $(i, j) \leq_R (k, l)$, wenn $(i = k$ und $j \leq l)$ oder $(j < k)$. Die Struktur $(Q, \leq_R)$ ist die sogenannte *Rado-Ordnung.*

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Rado-Ordnung $(Q, \leq_R)$ eine WQO ist.

Aufgabe 2. Wie in der Vorlesung sei $Q^{\mathbb{N}}$ durch „das hochgehobene $\leq_R$" nach folgender Vorschrift geordnet: Es seien $f, g : \mathbb{N} \to Q$. Wir schreiben $f \leq_R g$, wenn es eine streng monotone Funktion $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, sodass $f(n) \leq_R g(\phi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir benutzen also dasselbe Zeichen $\leq_R$ sowohl für die Ordnung auf Q als auch für die Ordnung auf $Q^{\mathbb{N}}$.

Zeigen Sie, dass $(Q^{\mathbb{N}}, \leq_R)$ keine WQO ist.

Aufgabe 3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $(A_n, \leq_n)$ eine lineare Ordnung derart, dass es eine Einbettung f_n von A_n nach $\mathbb{R}$ gibt. Auf der Menge $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times A_n$ definieren wir $\leq$ durch $(n, x) \leq (k, y)$ genau dann, wenn $n < k$ oder $n = k$ und $x \leq_n y$.

Gibt es eine Einbettung von $(A, \leq)$ nach $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$?

Schwerere Frage: Welche Wohlordnungen kann man in $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ einbetten? Eine Untergrenze (welche Wohlordnungen mindestens) wird durch die Aufgabe gegeben. Für eine Obergrenze (welche Wohlordnungen höchstens) kann man die Separabilität von $\mathbb{R}$ in der Standardtopologie ausnützen.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass „unschöne" Färbungen von $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ keine monochromatischen unendlichen Mengen besitzen müssen.

Es sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter über $\mathbb{N}$, also ein Ultrafilter mit der Eigenschaft, dass alle seine Elemente unendlich sind. Wir definieren $c_{\mathcal{U}} : [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0, 1\}$ durch

$$c(\{a_0 < a_1 < \dots\}) := \begin{cases} 1 & (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_{2i}, a_{2i+1})) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es keine unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt, sodass c auf $[A]^{\mathbb{N}}$ konstant ist.