BLATT 10

10.01.24

Aufgabe 1. Es sei (X, τ) ein polnischer topologischer Raum. Zeigen Sie: Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ ist das kleinste Mengensystem, das alle offenen Mengen enthält und unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen und abzählbaren Schnitten abgeschlossen ist.

Definition. Es seien A, B disjunkt. Eine Menge C *trennt A und B*, wenn $A \subseteq C$ und $C \cap B = \emptyset$.

Aufgabe 2. Es sei (X, τ) ein polnischer topologischer Raum und es seien $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$ und $F = \bigcup_{m\in\omega} F_m$ Teilmengen von X. Zeigen Sie: Wenn es für jedes Paar (n, m) eine Borelmenge gibt, die E_n und F_m teilt, dann gibt es eine Borelmenge, die E und F teilt.

Schwererer Zusatz: Zeigen Sie mithilfe der obigen Aussage den *Trennungssatz für analytische Mengen*: Wenn A und B disjunkte analytische Teilmengen von X sind, gibt es eine Borelmenge C, die A und B trennt. Hierbei nehmen wir als Definition von analytisch: Bild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion.