BLATT 11

17.01.24

Hinweis: Dies ist das letzte Blatt. Am 02.02.2024 wird das Take-Home-Exam besprochen. Wenn Sie dann noch eine Aufgabe vorrechnen müssen, können Sie auch eine Aufgabe des Take-Home-Exams vorstellen. Am 09.02.2024 findet kein Tutorium statt.

Aufgabe 1. Für eine Funktion $f\colon \omega \to \omega$ definieren wir $f \restriction n$ als Funktion von $\{0, \ldots, n-1\}$ nach ω, die $(f \restriction n)(k) = f(k)$ erfüllt. Gegeben eine Funktion $s\colon \{0, \ldots, n-1\}$ und eine Zahl $k \in \omega$ definieren wir $s^\frown\langle k\rangle$ als diejenige Funktion von $\{0, \ldots, n\}$ nach ω, die $(s^\frown\langle k\rangle)(l) = s(l)$ für $l < n$ sowie $(s^\frown k)(n) = k$ erfüllt.

Es sei X nun ein polnischer Raum. Zeigen oder widerlegen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage: Es sei für jedes n und jedes $s\colon n \to \omega$ eine Borelmenge $A_s \subseteq X$ gegeben, so dass die $\langle A_s \,:\, s \in \omega^{<\omega}\rangle$ ein Souslin-Schema bilden. Zusätzlich seien für jedes $s\colon n \to \omega$ und jedes $k, k' \in \omega$ die Mengen $A_{s^\frown\langle k\rangle}$ und $A_{s^\frown\langle k'\rangle}$ disjunkt.

Dann gilt:

$$\bigcup_{f \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} A_{f \restriction n} = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup \{A_s \mid s\colon n \to \omega\}.$$

Schwerere Aufgabe: Nun lassen wir den Zusatz über die Disjunktheit weg. Man kann nun die beiden Inklusionen einzeln prüfen. Denken Sie daran, dass X groß sein kann. Hinweis: Souslins Satz über eine analytische Menge, die nicht Borel ist, zum Beispiel Satz 14.2 in Kechris, Classical Descriptive Set Theory.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass folgende Mengen G_δ-Mengen (also abzählbare Schnitte offener Mengen) sind:

1. Die Menge der $f \in \omega^\omega$, sodass f eine Surjektion von ω auf ω ist.
2. Die Menge der $f \in \omega^\omega$, sodass f eine Injektion von ω in ω ist.
3. Die Menge der $f \in \omega^\omega$, sodass f eine Bijektion von ω ist.

Besprechung am Freitag, 26.01.2024, um 14:00