Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD Dr. M. Kühnel
Sommer 2010

GEOMETRIE VON BLÄTTERUNGEN
BLATT 1

(1) Sind folgende Distributionen von Blätterungen induziert?
  (a) $M := \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{E}_{(x,y,z)} := \{(-yr, s, r)^t |\ r, s \in \mathbb{R}\} = \{-yr\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y,z)} + s\frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y,z)} + r\frac{\partial}{\partial z}|_{(x,y,z)} |\ r, s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 = T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$,
  (b) $M := \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{E} := \ker \omega$ für $\omega(x, y, z) := xdx + ydy + (1 + x^2 + y^2)dz$.
  Zeigen Sie gegebenenfalls $gv(\mathcal{F}) = 0$.

(2) Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine Blätterung auf M. Wir nennen
$$\tilde{M}_{\mathcal{F}} := (\det N\mathcal{F} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+$$
die 2 : 1-Überlagerung der transversalen Orientierungen; hierbei wirkt $\mathbb{R}^+$ durch skalare Multiplikation auf $\det N\mathcal{F}_x$. Die Projektion auf M werde mit $\pi : \tilde{M}_{\mathcal{F}} \longrightarrow M$ bezeichnet. Zeigen Sie:
  (a) π ist eine $2 : 1$-Überlagerung,
  (b) $\pi^*\mathcal{F}$ (definiert durch die Daten $\pi^{-1}(U_i), f_i \circ \pi, \tau_{ij}$) ist eine transversal orientierbare Blätterung auf $\tilde{M}_{\mathcal{F}}$.
  (c) Ist $\mathcal{F}$ transversal orientierbar, so ist $\tilde{M}_{\mathcal{F}}$ die disjunkte Vereinigung zweier Kopien von M.

(3) Die 1-Form $\omega := d(\mathrm{Im}(z^3))$ induziert eine Blätterung $\mathcal{G}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Blätterung $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $\mathcal{G} = \psi^*\mathcal{F}$ für
$$\psi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^2$$
und $\mathcal{F}$ ist nicht transversal orientierbar. Skizzieren Sie $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Date: April 27, 2010.